SUR LA THÉORIE DES VECTEURS ESSAI DE CALCUL SYMBOLIQUE .

Autor(en): **Rousseau, Th.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515713

SUR LA THÉORIE DES VECTEURS
ESSAI DE CALCUL SYMBOLIQUE

PAR

Th. ROUSSEAU[1] (Dijon).

---

1. NOTATIONS. — Un vecteur sera représenté par la notation $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{AB}$; sa mesure, avec une unité de longueur et un sens positif choisi sur une parallèle, sera représentée par $\overline{V}$ ou $\overline{AB}$. Un système de vecteurs sera représenté par la notation $\vec{S}$.

λ désignant un nombre positif ou négatif, je représenterai par $\overrightarrow{\lambda V}$ le vecteur ayant même origine que $\vec{V}$, même support, et, pour mesure algébrique, le produit $\lambda \times \overline{V}$.

$\vec{V}$ désignant un vecteur défini en grandeur, direction et sens, mais d'origine indéterminée (on dit souvent *vecteur libre*), je désignerai par $\vec{V}_A$ celui de ces vecteurs qui a le point A pour origine.

Le *moment d'un vecteur* $\vec{V}$ par rapport à un point O sera représenté par la notation $M_0^t \vec{V}$.

Le *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (nombre égal au produit $UV \cos \alpha$ des grandeurs des deux vecteurs par le cosinus de leur angle) sera représenté par la notation $\vec{U} . \vec{V}$.

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (vecteur libre perpendiculaire à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$, ayant pour grandeur $UV \sin \alpha$) sera représenté par la notation $\vec{U} \times \vec{V}$.

---

[1] Th. Rousseau, professeur au Lycée de Dijon, tué à Avocourt le 11 avril 1916. Les éléments de ces Notes ont été trouvés depuis dans ses papiers; H. BEGHIN, professeur à l'Ecole navale (Brest), les a rassemblés et rédigés. Th. Rousseau fut d'ailleurs, de son vivant, un collaborateur de *L'Enseignement mathématique* (t. XI, 1909, pp. 81-97). — *Réd.*

2. Egalité. — Deux systèmes de vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ sont dits *égaux*, s'ils ont même résultante générale et même moment résultant en un point O : ils ont alors même moment résultant en tout point de l'espace. J'écrirai

$$\vec{S} = \vec{S}' .$$

Un *couple* est formé de deux vecteurs parallèles et de sens contraires ayant même grandeur. Deux couples sont *égaux*, s'ils ont même axe $\vec{G}$. Je représenterai par la notation [G] un couple ayant pour axe le vecteur $\vec{G}$.

3. Addition. — Je désignerai par la notation $\vec{S} + \vec{S}'$ le système formé par les vecteurs du système $\vec{S}$ et ceux du système $\vec{S}'$. Si le système $\vec{S}$ est formé de n vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ... , $\vec{V}_n$, j'écrirai, conformément à cette définition,

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n .$$

Il est évident que si, dans une somme, on remplace un terme par un terme égal (§ 2), on obtient une somme égale à la primitive.

La définition est *commutative* et *associative* [1].

Une première espèce de multiplication.

4. Définition. — J'appelle *produit de première espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je représente par la notation

$$\vec{U} \cdot \vec{V} ,$$

le nombre algébrique, dont la valeur absolue mesure six fois le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs ; le signe est +, si les deux vecteurs ont le sens direct l'un par rapport à l'autre ; le signe est — dans le cas contraire.

J'appelle *produit de première espèce de deux systèmes de vecteurs* $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ et je représente par

$$\vec{S} \cdot \vec{S}'$$

[1] Il est évident que cette définition n'a rien de commun avec celle de la somme géométrique.

la somme algébrique des produits de première espèce de chacun des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ de $\vec{S}$ par chacun des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_p$ de $\vec{S}'$[1] :

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \vec{U}_i\cdot\vec{V}_j .$$

PROPRIÉTÉS.

5. *Dans un produit de première espèce, on peut remplacer l'un des facteurs par un système égal.* En effet, le transport d'un vecteur $\vec{U}$ du système $\vec{S}$ en $\vec{U}'$ le long de son support ne modifie évidemment pas la mesure du tétraèdre construit sur ce vecteur et sur l'un quelconque $\vec{V}$ du système $\vec{S}'$. D'autre part, si l'on remplace deux vecteurs $\overrightarrow{AU_1}$, $\overrightarrow{AU_2}$ du système S, ayant la même origine A, par leur somme géométrique $\overrightarrow{AU}$, les trois tétraèdres construits sur l'un quelconque $\overrightarrow{BV}$ des vecteurs de $\vec{S}'$ et sur chacun des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}$ ont même base ABV, la hauteur du troisième est la somme algébrique des deux autres, d'où

$$\overrightarrow{AU_1}\cdot\vec{V} + \overrightarrow{AU_2}\cdot\vec{V} = \overrightarrow{AU}\cdot\vec{V} .$$

Ces opérations élémentaires ne modifiant pas la valeur du produit $\vec{S}\cdot\vec{S}'$, la proposition est établie.

6. Le produit de première espèce est évidemment *commutatif:*

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \vec{S}'\cdot\vec{S} .$$

7. Le produit de première espèce est *distributif par rapport à l'addition* (§ 2) :

$$\vec{S}\cdot(\vec{S}' + \vec{S}'') = \vec{S}\cdot\vec{S}' + \vec{S}\cdot\vec{S}'' .$$

(Le signe + du second membre est évidemment celui de l'addition algébrique.)

On voit donc que les règles de calcul de ces produits de première espèce sont celles des produits algébriques de deux facteurs.

[1] Ce produit de première espèce s'appelle généralement *moment relatif* des deux systèmes. Il est commode de le considérer comme un produit.

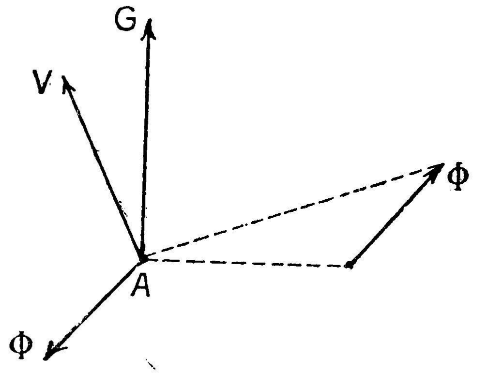
APPLICATIONS.

8. *Le produit de deux vecteurs de même origine est nul.*

9. Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont respectivement pour symétriques par rapport à un point ou à un plan deux vecteurs $\vec{U}'$ et $\vec{V}'$, on a

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = - \vec{U}' \cdot \vec{V}' .$$

10. *Le produit de deux couples est nul,* car on peut donner à ces deux couples le même centre de symétrie; la propriété résulte alors du § 9.



11. *Le produit d'un vecteur $\overline{A\vec{V}}$ et d'un couple d'axe $\vec{G}$ est égal au produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{G}$.* Cette proposition est en évidence si l'on donne à l'un des vecteurs $\vec{\Phi}$, Φ' du couple le point A comme origine. On a alors

$$\vec{V} \cdot [G] = \vec{V} \cdot \vec{\Phi}' .$$

On vérifie immédiatement sur la figure que le tétraèdre construit sur $\vec{V}$ et $\vec{\Phi}'$ est mesuré par le produit scalaire $\vec{V}.\vec{G}$. On a donc

$$\vec{V} \cdot [G] = \vec{V} . \vec{G} .$$

12. *Produit de deux systèmes $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ en fonction de leurs éléments de réduction $\vec{R}$, $\vec{G}$, $\vec{R}'$, $\vec{G}'$ en un même point* O. On a évidemment

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{S}' &= (\vec{R} + [G]) \cdot (\vec{R}' + [G']) . \\ &= \vec{R} \cdot \vec{R}' + \vec{R} \cdot [G'] + [G] \cdot \vec{R}' + [G] \cdot [G'] . \end{aligned}$$

En utilisant les §§ 8, 10, 11, on en déduit

$$\vec{S} \cdot \vec{S}' = \vec{R} . \vec{G}' + \vec{R}' . \vec{G} .$$

Si X, Y, Z, L, M, N et X', Y', Z', L', M', N' sont les coordonnées de $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ par rapport à trois axes rectangulaires issus de O, cette formule s'écrit

$$\vec{S} \cdot \vec{S}' = LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z .$$

13. *Carré d'un système de vecteurs.* On a, d'après le § 12,

$$\vec{S}^2 = 2\vec{R}.\vec{G} \ .$$

On peut donc exprimer l'égalité d'un système de vecteurs à un vecteur unique ou à un couple en annulant son carré.

APPLICATION AUX COMPLEXES LINÉAIRES.

14. On sait qu'un *complexe linéaire* Γ peut s'identifier avec la famille formée par les droites D de moment nul d'un système de vecteurs $\vec{S}$. Si donc $\vec{V}$ désigne un vecteur porté par l'une de ces droites D, l'équation du complexe s'écrit

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 \ . \tag{1}$$

Les droites du complexe Γ qui rencontrent une droite Δ_1 s'obtiennent en prenant les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 \ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \tag{2}$$

U_1 désignant un vecteur porté par Δ_1.

L'une de ces équations peut se remplacer par une combinaison des deux :

$$\vec{V}\cdot\vec{S} + \lambda\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad \text{ou} \qquad \vec{V}\cdot(\vec{S} + \overline{\lambda\vec{U}_1}) = 0 \ . \tag{3}$$

Si je détermine λ par la condition

$$(\vec{S} + \lambda\vec{U}_1)^2 = 0 \ , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \vec{S}^2 + 2\lambda\vec{S}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \tag{4}$$

le système $\vec{S} + \overline{\lambda\vec{U}_1}$ est égal à un vecteur unique $\vec{U}_2$; on est alors conduit à prendre les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 \ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_2 = 0 \ . \tag{5}$$

Les droites du couple Γ qui rencontrent une droite Δ_1 rencontrent donc une deuxième droite Δ_2. Δ_1 et Δ_2 sont dites *conjuguées*.

L'égalité

$$\vec{S} + \lambda\vec{U}_1 = \vec{U}_2 \qquad \text{ou} \qquad \vec{S} = \vec{U}_2 - \lambda\vec{U}_1 \tag{6}$$

montre qu'on peut réduire le système $\vec{S}$ à deux vecteurs ($-\lambda\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$) portés par deux droites conjuguées.

15. On vérifie de même que les droites communes à deux complexes linéaires Γ et Γ' rencontrent deux droites fixes; le système formé par les équations des deux complexes

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0\ , \qquad \vec{V}\cdot\vec{S}' = 0\ , \tag{7}$$

équivaut, en effet, aux deux équations

$$\vec{V}\cdot(\vec{S} + \lambda_1\vec{S}') = 0\ , \qquad V\cdot(S + \lambda_2 S') = 0\ , \tag{8}$$

λ_1 et λ_2 étant racines de l'équation

$$(\vec{S} + \lambda\vec{S}')^2 = 0\ . \tag{9}$$

16. Soient trois complexes linéaires Γ, Γ', Γ'', définis par trois systèmes de vecteurs $\vec{S}$, $\vec{S}'$, $\vec{S}''$. Il existe une infinité de systèmes de la forme $\vec{S} + \overrightarrow{\lambda' S'} + \overrightarrow{\lambda'' S''}$ égaux à un vecteur unique. La condition est, en effet,

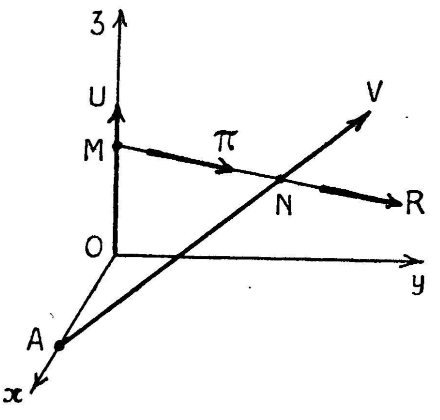
$$(S + \lambda' S' + \lambda'' S'')^2 = 0\ , \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\lambda'^2\vec{S}'^2 + 2\lambda'\lambda''\vec{S}'\cdot\vec{S}'' + \lambda''^2\vec{S}''^2 + \ldots = 0\ . \tag{11}$$

Si l'on prend trois solutions $(\lambda'_1, \lambda''_1;\ \lambda'_2, \lambda''_2;\ \lambda'_3, \lambda''_3)$ de cette équation, on obtient ainsi trois systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$ réduits respectivement à des vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3$. Les droites communes aux trois complexes rencontrent les trois droites supports de U_1, U_2, U_3. Elles forment donc la moitié d'une quadrique. Les résultantes des systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$, qui vérifient l'équation (11), forment l'autre moitié.

Une deuxième espèce de multiplication.



17. Définition. — J'appelle *produit de deuxième espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je désigne par la notation $\vec{U}\times\vec{V}$, le système de vecteurs $\vec{P}$ défini de la manière suivante :

Son axe central est la perpendiculaire commune MN à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Sa résultante $\vec{R}$ est le produit vectoriel $\vec{U}\times\vec{V}$; son moment résultant $\vec{\Pi}$ porté par MN est le produit du vecteur $\overrightarrow{MN}$ par le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$.

$$\vec{R} = \vec{U}\times\vec{V} \ ; \qquad \vec{\Pi} = (\vec{U}.\vec{V})\overrightarrow{MN} \ .$$

Je vais chercher les coordonnées de ce système $\vec{P}$. Je place $\vec{U}$ suivant Oz, et je suppose que Ox rencontre $\vec{V}$ en un point A $(\overline{OA} = a)$. Soient X, Y, Z, les projections de $\vec{V}$ sur les axes.

Les coordonnées α, β, γ du point N sont définies par les équations

$$\alpha = a + \rho X \ , \qquad \beta = \rho Y \ , \qquad \gamma = \rho Z \ , \qquad \alpha X + \beta Y = 0 \ ;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{aY^2}{X^2 + Y^2} \ ; \qquad \beta = -a\frac{XY}{X^2 + Y^2} \ ; \qquad \gamma = \frac{-aXZ}{X^2 + Y^2} \ .$$

On en déduit les six coordonnées du vecteur $\vec{R}$ et les trois projections du moment $\vec{\Pi}$, d'où, pour le système $\vec{P}$, après réductions, les six coordonnées

$$-UY \ , \quad UX \ , \quad 0 \ , \quad aUZ \ , \quad 0 \ , \quad 0 \ .$$

Etant donnés deux systèmes de vecteurs

$$\vec{S} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \ldots + \vec{U}_n \ ,$$

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_p \ ,$$

j'appelle *produit de deuxième espèce de ces deux systèmes,* et je désigne par la notation $\vec{S}\times\vec{S}'$ le système de vecteurs $\vec{P}$ formé par tous les produits de deuxième espèce des vecteurs $\vec{U}$ par les vecteurs $\vec{V}$:

$$\vec{S}\times\vec{S}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \vec{U}_i\times\vec{V}_j \ .$$

PROPRIÉTÉS.

18. *Dans un produit de deuxième espèce, on peut remplacer un facteur par un système égal.* En effet, le transport

du vecteur $\vec{V}_j$ en $\vec{V}'_j$ le long de son support ne change évidemment pas la définition du produit $\vec{U}_i{}^{\times}\vec{V}_j$. D'autre part, si l'on remplace deux vecteurs $\overrightarrow{AV}_1$, $\overrightarrow{AV}_2$ du système S' de même origine, par leur résultante $\overrightarrow{AV}$, les coordonnées des trois systèmes $\vec{U}{}^{\times}\vec{V}_1$, $\vec{U}{}^{\times}\vec{V}_2$, $\vec{U}{}^{\times}\vec{V}$ par rapport aux axes particuliers utilisés au § 17 sont respectivement de la forme

$$-\mathrm{UY}_1\ ,\ \ \mathrm{UX}_1\ ,\ \ 0\ ,\ \ a\mathrm{UZ}_1\ ,\ \ 0\ ,\ \ 0\ ;$$
$$-\mathrm{UY}_2\ ,\ \ \mathrm{UX}_2\ ,\ \ 0\ ,\ \ a\mathrm{UZ}_2\ ,\ \ 0\ ,\ \ 0\ ;$$
$$-\mathrm{U}(\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2)\ ,\ \ \mathrm{U}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)\ ,\ \ 0\ ,\ \ a\mathrm{U}(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2)\ ,\ \ 0\ ,\ \ 0\ .$$

On a donc évidemment

$$\vec{U}{}^{\times}\vec{V}_1+\vec{U}{}^{\times}\vec{V}_2=\vec{U}{}^{\times}\vec{V}\ .$$

La proposition en résulte.

19. *Le produit de deuxième espèce est semi-commutatif :*

$$\vec{S}{}^{\times}\vec{S}'=-\vec{S}'{}^{\times}\vec{S}\ .$$

20. *Le produit de deuxième espèce est distributif par rapport à l'addition :*

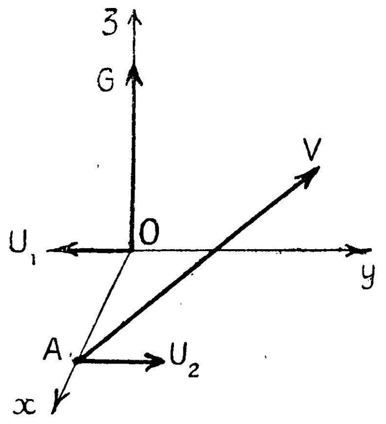
$$\vec{S}{}^{\times}(\vec{S}'+\vec{S}'')=\vec{S}{}^{\times}\vec{S}'+\vec{S}{}^{\times}\vec{S}''\ .$$

Les règles de calcul sont donc celles des produits algébriques de deux facteurs, sous la réserve de la semi-commutativité.

APPLICATIONS.

21. Il résulte de la semi-commutativité que le *carré d'un système de vecteurs est nul :*

$$\vec{S}^2=\vec{S}{}^{\times}\vec{S}=-\vec{S}{}^{\times}\vec{S}=0\ .$$



22. *Produit d'un couple par un vecteur.* Soit $\vec{G}$ l'axe du couple, porté par Oz ; je prends pour Ox la perpendiculaire commune à $\vec{G}$ et au vecteur donné $\vec{V}$; je représente le couple par deux vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ parallèles à Oy, dans le plan xOy ($\vec{U}_1$ issu de O, $\vec{U}_2$ issu de A

origine de $\vec{V}$). Cela posé, on a

$$[G]^{\times}\vec{V} = \vec{U}_1{}^{\times}\vec{V} + \vec{U}_2{}^{\times}\vec{V} \, .$$

Les deux produits $\vec{U}_1{}^{\times}\vec{V}$ et $\vec{U}_2{}^{\times}\vec{V}$ ont même axe central Ox; les résultantes générales, qui sont $\vec{U}_1{}_{\times}\vec{V}$ et $\vec{U}_2{}_{\times}\vec{V}$, se détruisent; il ne reste que le couple ayant pour axe $(\vec{U}_2 . \vec{V})$OA. On reconnaît dans cet axe le produit vectoriel $\vec{G}_{\times}\vec{V}$. On a donc

$$[\vec{G}]^{\times}V = [\vec{G}_{\times}\vec{V}] \, .$$

On aurait de même

$$\vec{V}^{\times}[G] = [\vec{V}_{\times}\vec{G}] \, .$$

Le produit d'un couple par un vecteur est donc un couple, dont l'axe est le produit vectoriel de l'axe du couple par le vecteur.

23. *Produit de deux couples.* Ce produit est nul, car de l'égalité

$$[G'] = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \, ,$$

je déduis

$$[G]^{\times}[G'] = [G]^{\times}\vec{V}_1 + [G]^{\times}\vec{V}_2 \, .$$

Les deux couples du second membre ont une somme nulle d'après le § 22.

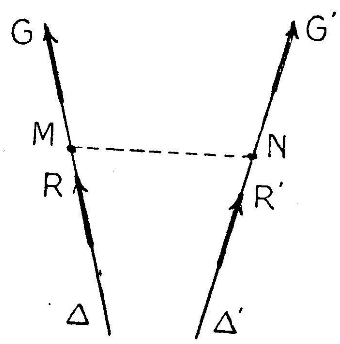
24. *Produit de deux systèmes en fonctions de leurs éléments de réduction* $\vec{R}$, $\vec{G}$, $\vec{R}'$, $\vec{G}'$ *en un point.* On a

$$\vec{S}^{\times}\vec{S}' = (\vec{R} + [G])^{\times}(\vec{R}' + [G']) = \vec{R}^{\times}\vec{R}' + \vec{R}^{\times}[G'] + [G]^{\times}\vec{R}' \, .$$

Le produit a pour résultante générale le produit vectoriel $\vec{R}_{\times}\vec{R}'$, issu du point donné O; le couple de réduction a pour axe

$$(\vec{R}_{\times}\vec{G}') + (\vec{G}_{\times}\vec{R}') \, .$$

25. *Produit de deux systèmes en fonction des éléments* $\vec{R}$, $\vec{G}$, $\vec{R}'$, $\vec{G}'$ *de leurs réductions canoniques.* Soient Δ et Δ' les axes centraux des deux systèmes donnés $\vec{S}$, $\vec{S}'$; MN $= d$ leur plus courte distance; φ l'angle de $\vec{R}$ avec $\vec{R}'$, positif si les deux vecteurs ont le sens direct



l'un par rapport à l'autre, négatif dans le cas contraire. Je pose

$$\overline{G} = h\overline{R} \ ; \qquad \overline{G}' = h'\overline{R}' \ .$$

Une rotation de 180° autour de MN change de sens les deux systèmes $\vec{S}$ et $\vec{S}'$, donc ne change pas leur système produit; MN est, par suite, l'axe central de ce système. D'ailleurs, on a

$$\vec{S}\times\vec{S}' = \vec{R}\times\vec{R}' + [\vec{G}_\times\vec{R}'] + [\vec{R}_\times\vec{G}'] \ ;$$

la résultante générale est celle du produit $\vec{R}\times\vec{R}'$, soit $\vec{R}_\times\vec{R}'$. Le moment résultant, mesuré avec le sens positif MN, a pour valeur

$$(\vec{R}.\vec{R}')d + (\overline{G}\overline{R}' + \overline{R}\overline{G}')\sin\varphi \ ,$$

ou

$$RR'(d\cos\varphi + (h + h')\sin\varphi) \ .$$

Pour que le produit $\vec{S}\times\vec{S}'$ de deux systèmes soit égal à zéro, il faut et il suffit, ou bien que l'un des facteurs $\vec{S}$ ou $\vec{S}'$ soit égal à zéro, ou que $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ aient même axe central, ou que $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ soient égaux à deux couples.

26. Exercice. — Un système $\vec{S}$ peut se réduire à deux vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$. De l'égalité

$$\vec{S} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$$

je déduis

$$\vec{S}\times\vec{U}_2 = \vec{U}_1\times\vec{U}_2 \ ,$$

puisque le carré d'un vecteur $\vec{U}_2$ est nul. En exprimant que les deux produits $\vec{S}\times\vec{U}_2$ et $\vec{U}_1\times\vec{U}_2$ ont même axe central, j'obtiens la propriété connue: *La perpendiculaire commune à $\vec{U}_1$ et à $\vec{U}_2$ rencontre à angle droit l'axe central du système que forment ces deux vecteurs.* En étudiant de plus près l'égalité des deux produits $\vec{S}\times\vec{U}_2$ et $\vec{U}_1\times\vec{U}_2$, on aurait des relations intéressantes entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ d'une part, et, d'autre part, les éléments $\vec{R}$, $\vec{G}$ de la réduction canonique.

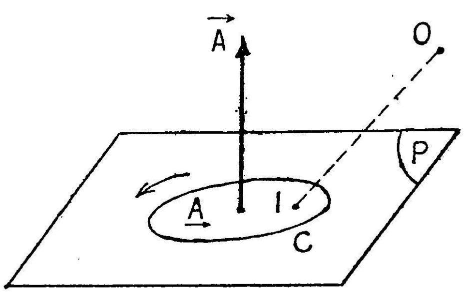
27. Exercice proposé. — Démontrer l'égalité

$$\vec{S}\times(\vec{S}'\times\vec{S}'') + \vec{S}'\times(\vec{S}''\times\vec{S}) + \vec{S}''(\vec{S}\times\vec{S}') = 0 \ .$$

(On établira d'abord la propriété pour trois vecteurs de même origine; il sera commode de décomposer l'un des deux vecteurs en deux vecteurs perpendiculaires, dont l'un soit perpendiculaire au plan des deux autres vecteurs donnés; dans le cas de trois systèmes, on utilisera leurs éléments de réduction en un même point.)

Vecteurs aires.

28. Soit A une *aire plane* limitée à un contour C orienté, c'est-à-dire sur lequel un sens de parcours est choisi. Je considère cette aire comme une grandeur géométrique que j'appellerai *vecteur-aire,* et que je désignerai par la notation $\underset{\rightarrow}{A}$; cette grandeur sera caractérisée par les définitions de l'égalité et de l'addition qui seront données plus loin.



Je désigne par $\vec{A}$ un vecteur *linéaire* perpendiculaire au plan P qui contient l'aire, dirigé dans un sens tel que le sens de parcours choisi le long de C soit le sens de droite à gauche pour un observateur placé suivant $\vec{A}$, et mesuré par le même nombre que l'aire A elle-même.

S'il s'agit d'une *aire polygonale abcd ... k*, le vecteur linéaire $\vec{A}$ est la moitié de l'axe du couple représenté par le système de vecteurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{cd}$, ..., $\overrightarrow{ka}$.

29. Moment d'un système de vecteurs-aires. — Etant donné un vecteur-aire $\underset{\rightarrow}{A}$ et un point O, je prends dans le plan P du vecteur-aire un point I arbitraire; j'appelle *moment du vecteur-aire* $\underset{\rightarrow}{A}$ *par rapport au point* O *le produit scalaire*

$$M_O^t \underset{\rightarrow}{A} = \overrightarrow{OI}.\vec{A}\ .$$

Ce produit est évidemment indépendant de la position du point I dans le plan P.

Le moment d'un vecteur-aire est nul, si le point O est dans le plan P du vecteur-aire.

La somme algébrique des moments par rapport à un point O des vecteurs-aires d'un système $\underset{\rightarrow}{S}$ est le *moment du système* $\underset{\rightarrow}{S}$ *par rapport au point* O.

30. Egalité. — On dit que deux systèmes $\underset{\rightarrow}{S}$ et $\underset{\rightarrow}{S'}$ de vecteurs-aires sont *égaux,* si les vecteurs linéaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ et $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_p$, correspondant aux vecteurs-aires de chacun d'eux ont même résultante générale, et si, d'autre part, les deux systèmes ont même moment en un point O.

Justification : Si les deux systèmes ont même moment en un point O, ils ont même moment en tout autre point O'; on a, en effet, pour l'un des vecteurs-aires,

$$\overrightarrow{O'I}.\vec{A} - \overrightarrow{OI}.\vec{A} = \overrightarrow{O'O}.\vec{A} \ ,$$

et, pour le système donné $\underset{\rightarrow}{S}$,

$$M^t_{O'}\underset{\rightarrow}{S} - M^t_{O}\underset{\rightarrow}{S} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O'O}.\vec{A}_i \ .$$

Ce second membre est le produit scalaire de $\overrightarrow{O'O}$ par la résultante générale des vecteurs linéaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$. Cette résultante étant la même pour les systèmes $\vec{S}$ et $\vec{S}'$, on voit que la définition de l'égalité est bien indépendante du point O.

31. Addition. — Je désigne par $\underset{\rightarrow}{S} + \underset{\rightarrow}{S'}$ le système formé par les vecteurs-aires du système $\underset{\rightarrow}{S}$ et ceux du système $\underset{\rightarrow}{S'}$. On peut écrire, conformément à cette définition,

$$\underset{\rightarrow}{S} = \underset{\rightarrow}{A_1} + \underset{\rightarrow}{A_2} + \ . \ . + \underset{\rightarrow}{A_n} \ ,$$

si $\underset{\longrightarrow}{A_1}, \underset{\longrightarrow}{A_2}, \ldots, \underset{\longrightarrow}{A_n}$ sont les vecteurs-aires qui constituent le système $\underset{\rightarrow}{S}$.

Applications.

32. *Egalité de deux vecteurs-aires.* — Deux vecteurs-aires sont égaux, s'ils ont même plan, même orientation dans ce plan et si leur aire est mesurée par le même nombre. Cette proposition résulte immédiatement du § 30, si l'on choisit le point O dans le plan de l'un des vecteurs-aires.

33. Un vecteur-aire $\underset{\rightarrow}{A}$ est égal à la somme $\underset{\longrightarrow}{A_1} + \underset{\longrightarrow}{A_2}$ de deux

vecteurs-aires, si le plan P de A passe par l'intersection des plans P_1 et P_2 des vecteurs-aires $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$, et si, en outre, le vecteur linéaire $\vec{A}$ est la somme géométrique des vecteurs linéaires $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$. Cette proposition est évidente, si l'on choisit le point O (§ 30) sur l'intersection des plans P_1 et P_2.

Ceci suppose que les plans $P_1 P_2$ ne sont pas parallèles. S'ils sont parallèles, les vecteurs-aires $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ forment un système égal à un seul vecteur-aire $\vec{A}$, dont le plan P est parallèle à P_1 et P_2 et divise une perpendiculaire $I_1 I_2$ à ces plans dans le rapport défini par

$$\overline{II_1} \times \overline{A_1} + \overline{II_2} \times \overline{A_2} = 0 .$$

Le vecteur linéaire $\vec{A}$ est, ici encore, la somme géométrique des vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$. Il suffit, pour établir ces propriétés, d'exprimer au point I l'égalité des deux systèmes $(\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2})$ et $\vec{A}$.

34. Si les deux aires A_1 et A_2 sont situées dans deux plans parallèles, ont même mesure, et des sens opposés, les vecteurs-aires correspondants forment un *couple de vecteurs-aires;* il n'existe aucun vecteur-aire égal à un couple. Le moment d'un couple par rapport à un point O est le même dans tout l'espace. Un déplacement *quelconque* effectué sur un couple donne un couple égal.

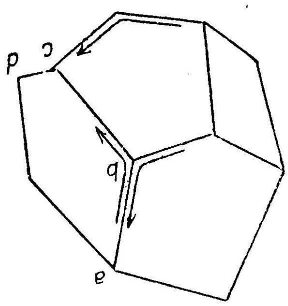
35. Réduction d'un système de vecteurs-aires. — *Un système de vecteurs-aires* S *est égal à un vecteur-aire unique, ou, exceptionnellement, à un couple.* Si, en effet, la résultante générale des vecteurs linéaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ n'est pas nulle, il est facile de construire un vecteur-aire $\vec{A}$ ayant même moment que le système S en un point O, et tel que le vecteur linéaire $\vec{A}$ soit cette résultante générale.

Si cette résultante générale est nulle, on peut construire un couple égal au système donné.

36. Notion de volume. — Soit un polyèdre fermé, limitant une portion E d'espace. Sur le contour de chaque face, je choisis, comme sens de parcours, le sens contraire des aiguilles d'une montre, pour un observateur placé à l'exté-

rieur du polyèdre. Les différentes faces du polyédre constituent, ainsi orientées, un système de vecteurs-aires S.

Ce système S *est égal à un couple de vecteurs-aires.* En effet, les vecteurs linéaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ correspondant à ces vecteurs-aires représentent, au facteur 2 près (§ 28), les axes des couples constitués par les vecteurs $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{cd}, \ldots$ qui limitent chaque face. Ces couples forment un système égal à zéro, car les vecteurs dont ils sont formés sont deux à deux égaux et directement opposés ($\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ba}$, $\overrightarrow{bc}$ et $\overrightarrow{cb}$, ...); la somme géométrique des vecteurs linéaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n$ étant nulle, le système S est bien égal à un couple.



Cela posé, on dit que les volumes de deux polyèdres sont égaux, si les couples de vecteurs-aires constitués par les faces de ces deux polyèdres sont égaux.

Le volume d'un polyèdre E est la *somme des volumes de deux polyèdres* E_1 et E_2, si le couple de vecteurs-aires constitué par les faces de E est égal à la somme des couples de vecteurs-aires constitués par les faces de E_1 et de E_2.

Le polyèdre constitué par la juxtaposition de deux polyèdres E_1 et E_2, avec suppression de la cloison qui les sépare, a pour volume la somme des volumes des polyèdres E_1 et E_2. En effet, le système de vecteurs-aires formé par les faces de E_1 et de E_2 n'est pas altéré par la suppression de cette cloison qui figure deux fois dans ce système avec des orientations opposées.

La grandeur volume d'un polyèdre E est ainsi parfaitement définie; le moment du couple S de vecteurs-aires formé par les faces de ce polyèdre est constant dans tout l'espace. La valeur de cette constante est une *mesure directe* de ce volume; car, à des volumes égaux correspondent des moments égaux; et, d'autre part, si un volume est la somme de deux autres, le moment correspondant au premier est la somme des moments correspondant aux deux autres. Tout autre nombre proportionnel à ce moment est aussi une mesure directe.

Si on prend comme volume-unité celui du cube construit sur l'unité de longueur, le moment de ses faces est 3, comme on le vérifie immédiatement en prenant ce moment en l'un des sommets. Il en résulte que le volume d'un polyèdre quelconque est mesuré, avec cette unité, par le tiers du moment du système de vecteurs-aires formé par ses faces.

On conçoit facilement que cette théorie peut s'étendre à des volumes de forme quelconque.

CALCUL DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE OU TRANSCENDANTE PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

PAR

Mladen-T. Béritch (Belgrade).

Le procédé par approximations successives appliqué à l'extraction de la n^{me} racine d'un nombre réel et indiqué dans une Note précédente[1] peut être, sous certaines conditions, généralisé et appliqué au calcul des racines réelles d'une équation algébrique ou transcendante.

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée, algébrique ou transcendante, dont on cherche une racine réelle simple, que nous désignerons par a. Considérons deux fonctions :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

(Ces deux fonctions se réduisent aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de la Note citée en remplaçant $f(x)$ par t^n — A.)

Supposons que la racine cherchée a soit dans un intervalle (m, M) dans lequel : 1° la fonction $f(x)$ n'a pas de singularités ;

[1] M.-T. Béritch, *Enseign. mathém.*, T. XX, 1918, p. 194-198.