

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR
INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE
Autor: Daniëls, M.-Fr.
Kapitel: IV
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18026>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

crit dans la même conique en soumettant les $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ seuls à une permutation circulaire; dans ce cas nous trouvons :

$$[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3] = [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3].$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_3][\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_3]}{[\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1][\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3]} = \frac{[\mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3]}{[\mathbf{r}_2 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}'_3][\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème bien connu de Carnot*.

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{aligned} & [\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] [\lambda_1 \mathbf{b} + \mu_1 \mathbf{c} \quad \lambda_2 \mathbf{c} + \mu_2 \mathbf{a} \quad \lambda_3 \mathbf{a} + \mu_3 \mathbf{b}] \\ & \pm [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] [\lambda'_1 \mathbf{b}' + \mu'_1 \mathbf{c}' \quad \lambda'_2 \mathbf{c}' + \mu'_2 \mathbf{a}' \quad \lambda'_3 \mathbf{a}' + \mu'_3 \mathbf{b}'] \end{aligned}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sont remplacés par les $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}' & \lambda_2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' & \lambda_3 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}' \\ \mu_1 &= -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}' & \mu_2 &= -\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}' & \mu_3 &= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' \end{aligned}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] [\mathbf{V}\mathbf{a}', \mathbf{b}\mathbf{c} \quad \mathbf{V}\mathbf{b}', \mathbf{c}\mathbf{a} \quad \mathbf{V}\mathbf{c}', \mathbf{a}\mathbf{b}] + [\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] [\mathbf{V}\mathbf{a}, \mathbf{b}'\mathbf{c}' \quad \mathbf{V}\mathbf{b}, \mathbf{c}'\mathbf{a}' \quad \mathbf{V}\mathbf{c}, \mathbf{a}'\mathbf{b}'] \equiv 0 \quad (\text{X})$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques aient les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &\equiv \mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c} & \mathbf{A}'_i &\equiv \mathbf{V}\mathbf{b}'\mathbf{c}'; \mathbf{V}\mathbf{c}'\mathbf{a}'; \mathbf{V}\mathbf{a}'\mathbf{b}' \\ \mathbf{a}_i &\equiv \mathbf{V}\mathbf{b}\mathbf{c}; \mathbf{V}\mathbf{c}\mathbf{a}; \mathbf{V}\mathbf{a}\mathbf{b} & \mathbf{a}'_i &\equiv \mathbf{a}'; \mathbf{b}'; \mathbf{c}' \end{aligned}$$

Dans ce cas, les droites qui relient les sommets correspondants (A_i, A'_i) et les points d'intersection des côtés correspondants (a_i, a'_i) seront

$$(A_1, A'_1) \equiv V\alpha, \beta'c' \quad (a_1, a'_1) \equiv V\alpha', \beta c$$

etc., et l'identité (IX) nous apprend :

Lorsque les droites (A_i, A'_i) sont concourantes, les points d'intersection (a_i, a'_i) sont collinéaires et inversement. C'est là le théorème bien connu de Desargues.

2. Lorsque par contre les sommets et les côtés de deux triangles sphériques A_i et A'_i sont

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \alpha; \beta; c & A'_i &\equiv \alpha'; \beta'; c' \\ a_i &\equiv V\beta c; Vc\alpha; V\alpha\beta & a'_i &\equiv V\beta'c'; Vc'\alpha'; V\alpha'\beta' \end{aligned}$$

la même identité nous fournit un *théorème de Steiner*¹ :

*Lorsque les normales abaissées des A_i sur les a'_i sont concourantes, il en est de même des normales abaissées des A'_i sur les a_i .*²

On le voit sans peine en remarquant que $V\alpha, \beta'c'$, etc., sont dans ce cas les normales abaissées des sommets A_i du premier triangle sur les côtés a'_i du second. Leur produit pseudo-scalaire est nul lorsque ces trois normales sont concourantes.

3. En troisième lieu considérons ensemble les identités :

$$\begin{aligned} [abc][V\alpha, \beta'c' \quad V\beta, c'\alpha' \quad Vc, \alpha'b'] + [\alpha'\beta'c'][V\alpha', \beta c \quad V\beta', c\alpha \quad Vc', \alpha b] &\equiv 0 \\ [abc][V\alpha, c'\beta' \quad V\beta, \beta'\alpha' \quad Vc, \alpha'c'] + [\alpha'c'\beta'][V\alpha', c\beta \quad V\beta', \beta\alpha \quad Vc', \alpha c] &\equiv 0. \end{aligned}$$

La seconde s'obtient de la première, lorsqu'on y change β' et c' en c' et β' . Or, la disparition des premiers termes dans les deux identités entraîne celle des seconds termes, ce qui, en supposant que les α, β, c sont les sommets d'un premier et α', β', c' ceux d'un second triangle sphérique signifie :

¹ *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 155-162.

² Voir par. 23, 2.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2 , il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2 , en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i et A'_i sont diorthologiques en A_1 , ils le sont encore en A'_1 .

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[a'b'c'][\lambda_1 b + \mu_1 c \dots] \pm [abc][\lambda'_1 b' + \mu'_1 c' \dots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $a, a', b, \dots$ par les vecteurs également arbitraires $Vbc, Vb'c', Vca, \dots$ et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux $\lambda_i, \mu_i \dots$, prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a' \cdot b & \lambda_2 &= b' \cdot c & \lambda_3 &= c' \cdot a \\ \mu_1 &= a' \cdot c & \mu_2 &= b' \cdot a & \mu_3 &= c' \cdot b \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 Vca + \mu_1 Vab = Va \cdot a' \cdot bc$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned} &[a'b'c']^2[Va \cdot a' \cdot bc \quad Vb \cdot b' \cdot ca \quad Vc \cdot c' \cdot ab] \\ &- [abc]^2[Va' \cdot a \cdot b'c' \quad Vb' \cdot b \cdot c'a' \quad Vc' \cdot c \cdot a'b'] \equiv 0. \end{aligned} \quad (XI)$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*¹:

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i des droites $(A_i, A'_i) \equiv P_i$ avec les côtés a_i du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction q_i des points $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ avec les sommets A'_i du second triangle sont concourantes et inversement.

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.