BIBLIOGRAPHIE

Maxime Bôcher. — **Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes,** professées à la Sorbonne en 1913-1914, recueillies et rédigées par Gaston Julia. — 1 vol. gr. in-8° de vi-118 p. et 8 fig.; 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Ces *Leçons,* publiées dans la Collection de Monographies de M. Emile Borel, proviennent encore de l'enseignement donné en Sorbonne par un professeur étranger, américain cette fois, et appartenant plus particulièrement à la brillante Université Harward. La France s'est toujours félicitée de tels concours et de telles amitiés et point à tort semble-t-il; ce pays, qu'on accuse volontiers de légèreté et d'imprévoyance, n'a tout de même pas mal placé sa confiance en l'accordant à l'Angleterre et à l'Amérique.

Il est aussi fort intéressant de voir nos amis étrangers remettre en lumière le nom et les méthodes de Sturm alors qu'avec une modestie exagérée nous les aurions peut-être laissés s'effacer derrière les constructions plus modernes relatives aux équations intégrales.

Il me semble pouvoir situer, en bloc, les *Leçons* aujourd'hui publiées en y voyant surtout un développement des questions traitées par M. Emile Picard dans les chapitres V et VI du tome III de son *Traité d'Analyse* (seconde édition, pp. 88-128).

Partant de l'équation

$$u'' + pu' + qu = r ,$$

où p, q, r sont des fonctions quelconques de x, M. Bôcher montre, dans un premier chapitre, qu'il n'y a, en général, qu'une courbe intégrale passant par un point donné avec une pente donnée. Il étend la question au sens analytique, le plus général, du mot courbe. Il étudie notamment la constitution fonctionnelle de u par rapport à p, q, r et aux constantes γ et γ', introduites par l'intégration précitée.

Le chapitre II reprend l'étude de l'équation linéaire d'ordre quelconque, de l'équation adjointe de Lagrange et de la formule de Green les réunissant. Mais cet exposé classique est complété au jour d'une symétrie mise en parallèle avec celle de systèmes de formes algébriques bilinéaires.

Le chapitre III reprend l'équation du second ordre et cherche à préciser la position des zéros de ses solutions réelles. C'est le problème de M. E. Picard déjà mentionné. C'est également ici que réapparaissent les théorèmes de Sturm proprement dits sur la manière dont les solutions indépendantes séparent respectivement leurs zéros. Des théorèmes de ce genre peuvent s'étendre entre certaines combinaisons linéaires en u et u'. On peut étudier aussi la manière dont oscillent les solutions u connaissant les bornes des coefficients de l'équation.

Le chapitre IV étend ces théorèmes d'oscillation au cas des équations d'ordre quelconque.

Le chapitre V a trait aux fonctions de Green. Il fait surtout ressortir pour ces fonctions, ordinairement définies sous forme d'intégrales, un mode de symétrie analogue à celui étudié, au chapitre II, pour des combinaisons de formes différentielles.

Et c'est une chose fort curieuse que de voir les procédés algébriques de Sturm, concernant les séparations de racines, s'étendre ainsi dans la théorie des équations différentielles et remonter enfin jusqu'aux symétries des expressions fonctionnelles introduites dans la Science par la théorie des équations intégrales.

Ce livre contient de très nombreuses références bibliographiques ; si sa remarquable originalité de conception honore grandement son auteur, la rédaction n'honore pas moins M. Gaston Julia qui s'est acquitté d'une telle tâche avec un soin digne de tous éloges. A. Buhl (Toulouse).

R. C. Fawdry. — **Dynamics,** Part I. — 1 vol. cart. in-16, 187 p. ; 3 sh ; G. Bell and Sons, Londres.

Ce manuel fait partie de la collection « Bell's Mathematical Series for School and Colleges ». Faisant suite à la Statique, du même auteur, il fournit une première introduction à la Dynamique limitée aux notions essentielles que l'on enseigne généralement dans les écoles secondaires. Ces premiers éléments sont répartis comme suit :

Cinématique. — Chute des corps. — Les lois du mouvement. — Travail, puissance et énergie. — Le choc. — Composition des vitesses, des accélérations et des forces. — Vitesse relative. — Mouvement circulaire.

Par les nombreux exercices numériques qui accompagnent chaque chapitre, ce petit manuel constitue en même temps un excellent recueil de problèmes élémentaires de Dynamique. H. F.

R. Mehmke. — **Leitfaden zum graphischen Rechnen.** (Sammlung mathem.-physik. Lehrbücher.) — 1 vol. cart. in-16, 152 p., 4 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce *Précis de calcul graphique* est un résumé des leçons professées l'Ecole technique supérieure de Stuttgard. L'auteur se borne au calcul graphique proprement dit sans aborder les méthodes graphiques de la Nomographie. Il divise son exposé en deux parties. Dans la première il étudie le calcul ordinaire et la résolution graphique des équations, en ayant recours : *a)* aux échelles usuelles, *b)* aux échelles logarithmiques. Cette méthode logarithmique, due à M. Mehmke, sera étudiée avec beaucoup d'intérêt par tous ceux qui désirent suivre les progrès des procédés graphiques.

La seconde partie est consacrée à l'intégration et à la différentiation : Construction des courbes intégrales. Résolution des équations différentielles du 1^er^ ordre ou d'ordre supérieur. Emploi d'échelles usuelles ou d'échelles logarithmiques.

Il n'est guère besoin d'ajouter que l'on retrouve dans cet opuscule les qualités de précision et de clarté qui caractérisent les travaux de M. Mehmke.

H. F.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — **Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications.** Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8° de x-268 p. et 23 fig.; 12 fr.; Paris, Gauthier-Villars, 1917.

On peut dire, d'une manière générale, que ces *Leçons* représentent une heureuse tentative de construction des fonctions elliptiques fondée surtout sur l'emploi du calcul algébrique. Le premier grand calcul fondamental est l'intégration de l'équation d'Euler d'où l'on peut tirer la formule d'addition pour sn. D'une manière plus précise, l'auteur en déduit les propriétés de $sn(u + iv)$ et notamment la double périodicité par comparaison avec des périodes respectives de $sn\,u$ et $sn\,iv$. La Première Partie de l'Ouvrage renferme aussi tout ce qui concerne la réduction des intégrales elliptiques, ce à quoi la transformation de Landen paraît naturellement rattachée. On sait que cette transformation rend possible l'étude d'intégrales elliptiques au moyen d'autres de même forme mais de modules différents; elle ne repose que sur un calcul très simple d'ailleurs présenté par J. Bertrand sous une élégante forme géométrique. Il est dans l'esprit du Livre non seulement de ne point dédaigner mais encore de rechercher de telles choses.

Avec une Seconde Partie nous abordons les fonctions de Weierstrass. Ici les intégrales elliptiques contiennent des radicaux portant sur le fameux polynome $4x^3 - g_2x - g_3$; des différences notables, portant tout au moins sur le maniement des fonctions inverses, s'observent suivant le signe du discriminant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. C'est ce que M. de Montessus fait ressortir par d'originales méthodes; la formule d'addition de pu est tirée de celle de sn quand Δ est positif, de celle de cn quand Δ est négatif.

Une Troisième Partie fait appel aux généralités de la théorie des fonctions. Il est certain que ce sont ces généralités qui donnent encore les vues les plus claires sur l'inversion, surtout quand les singularités des intégrales sont situées de manière quelconque dans le champ complexe. De plus, les propriétés générales des fonctions entières et méromorphes trouvent, dans le domaine elliptique, de belles applications particulières. Un coup d'œil rapide en ces deux voies fondamentales s'est traduit ici par une exposition réduite et originale.

Enfin, dans une Quatrième Partie, nous venons aux fonctions θ, facilement présentées au moyen de celles de leurs propriétés qui permettent d'immédiats développements en séries. Il paraît ensuite naturel de revenir, par l'intermédiaire de ces fonctions θ, aux fonctions elliptiques déjà étudiées, notamment à sn, cn, dn.

Là encore, l'auteur a fait beaucoup de calculs; l'ouvrage ne contient pas d'applications à proprement parler, mais il est éminemment propre à aboutir à celles-ci, s'efforçant de ne rien laisser dans l'ombre, même en ce qui concerne les difficultés arithmétiques. Il n'y a point là quelque promesse plus ou moins vaine. Rappelons que M. de Montessus est aussi l'auteur des *Exercices et Leçons de Mécanique analytique* publiés en 1915 et analysés, d'ailleurs, dans *L'Enseignement Mathématique* (1916, pp. 140-142 [1]). Ces *Exercices* ont été terminés par une exposition de la théorie des fonctions elliptiques particulièrement adaptée à la résolution des problèmes du Re-

[1] Je profite de ce rappel pour corriger une coquille assez agaçante. Dans l'article bibliographique cité, p. 141, ligne 16, au lieu de *prismes elliptiques*, il faut lire *formes elliptiques*.
A. B.

cueil. A beaucoup d'égards les *Leçons* d'aujourd'hui développent cet appendice; l'auteur de celui-ci ne pouvait oublier maintenant ce qu'il avait si bien vu sous l'empire des nécessités d'ordre mécanique. Lui-même renvoie modestement, pour de telles applications, au Livre bien connu de P. Appell et E. Lacour. A coup sûr un tel renvoi ne saurait être méconnu, mais pour moi, qui ne suis point tenu à de telles considérations de modestie, je renverrai également aux *Exercices de Mécanique* de M. de Montessus quant à l'élégante et précieuse intervention des fonctions elliptiques dans la science analytique du mouvement et de la géométrie des masses.

A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Journal of Mathematics. — Vol. XXXVIII, N° 4. — H. Taber : Conditions for the Complete Reductibility of Groups of Linear Substitutions. — C.-H. Sisam : On Sextic Surfaces having a Nodal Curve of Order 8. — W.-D. Macmillan : A theorem connected with Irrational Numbers. — W.-B. Ford : On the Representation of Arbitrary Functions by Definite Integrals. — H.-R. Kingston : Metric Properties of Nets of Plane Curves. — H.-C. Gossard : On a special Elliptic Ruled Surface of the Ninth Order.

Vol. XXXIX, n° 1. — T. Fort : Linear Difference and Differential Equations. — W.-V. Lovitt : Some Singularities of a Contact Transformation. — D. Buchanan : Oscillations near an Isosceles-Triangle Solution of the Problem of Three Bodies as the Finite Masses Become Unequal. — L.-C. Cox : The Finite Groups of Birational Transformations of a Net of Cubics. — A.-E. Young : On the Determination of a Certain Class of Surfaces. — H. Hilton and Miss R.-E. Colomb : On Orthoptic and Isoptic Loci. — L.-B. Robinson : A New Canonical Form for Systems of Partial Differential Equations.

Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig. — Band 25. — M. Pasch : Zusammenhänge in der Lehre von den Kegelschnitten. — F. Emde : Schwingungen und Vektoren. — W. Weber : Zur Geometrie des einfachen Vierecks. — G. Jaumann : Ueber Dyaden und Dyadenrechnung. — E. Lampe : Aufgaben über die aus den Gliedern einer ganzzahligen arithmetischen Progression gebildeten symmetrischen Grundfunktionen und über die Summen gleich hoher Potenzen dieser Glieder. — L. Berwald : Ueber einige Minimums-Sätze der Dreiecks- und Tetraedergeometrie. — P. Riebesell : Ueber die Integration der ballistischen Hauptgleichung bei Anwendung des Sommerfeldschen Luftwiderstandsgesetzes. — O. Danzer : Eine Abbildung allgemeiner Konchoiden auf Regelflächen. — E. Budde : Ueber Nablaprodukte. — M. Bauer : Zur Theorie der arithmetischen Progression. — G. Pick : Zur nichteuklidischen Geometrie. — J. Horn : Ueber nichtlineare Differenzengleichungen. — A. Horn : Ueber die Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung von linearen Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kernen. — E. Landau : Neuer Beweis eines Hardys-