infini d'aiguilles, la série T se confondrait avec celle des nombres impairs.

J'ai conseillé à mes jeunes gens de fabriquer pour leurs amis le jeu des 4 aiguilles avec quelque 15 à 20 disques. Dans la pratique, ce jeu donnera matière à beaucoup plus d'hésitations que le jeu classique de la tour d'Hanoï. C'est dire qu'il a chance de n'être pas moins amusant. Ils l'introduiront par un petit conte assyrien et l'ont baptisé déjà : le *jeu de la Ziggurat.*

Mon vieil ami L.-G. Du Pasquier, professeur à l'Université de Neuchâtel, auquel j'ai communiqué les pages ci-dessus a bien voulu répondre déjà au vœu que j'y exprime d'obtenir des mathématiciens une formule facile permettant de calculer T_n. Il m'a permis de joindre à ma communication le complément qui suit.

Pierre Bovet (Genève).

II. — Désignons par $t_{\lambda-1}$ le $\lambda^{\text{ième}}$ nombre triangulaire ; d'après cela, $t_0 = 1$, $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $t_3 = 10$, $t_4 = 15$,..... en général : $t_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Soit n un nombre positif d'ailleurs quelconque ; représentons par $E_2(n)$ le plus grand nombre triangulaire contenu dans n ; par exemple $E_2(2) = 1$; $E_2(\pi) = 3$; $E_2(9) = 6$; $E_2(10, 33) = 10$; etc. (Cette notation est une généralisation du symbole de Legendre : $E(n)$ = plus grand nombre *entier* contenu dans n ; nous posons donc par définition : $E_1(x) = E(x)$; $E_2(x)$ = le plus grand nombre triangulaire contenu dans x ; $E_3(x)$ = le plus grand nombre carré contenu dans x ; $E_4(x)$ = le plus grand nombre pentagonal contenu dans x ; et ainsi de suite).

Cela posé, tout nombre positif n peut se représenter, et d'une seule manière, sous forme d'une somme de deux termes

$$n = t_\lambda + r \tag{a}$$

où $t_\lambda = E_2(n)$ est le plus grand nombre triangulaire contenu dans n, et r un nombre non négatif. Si, en particulier, n représente un nombre entier, par exemple le nombre des disques dans le jeu en question, on aura les décompositions suivantes :

$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
$t_\lambda = 1$	1	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	10	15	15 ...
$r = 0$	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1 ...
$\lambda = 0$	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4 ...

La série T_n est alors représentée par la formule

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \, . \, 2^{\lambda+1}$$

La sommation de la série

$$1 + 2 \, . \, 2^1 + 3 \, . \, 2^2 + 4 \, . \, 2^3 + 5 \, . \, 2^4 + \ldots + (n+1) \, . \, 2^n = \sum_{\lambda}^{0\ldots n} (\lambda+1) \, . \, 2^\lambda.$$

qui intervient dans la formation des nombres T_n, peut être trouvée, grâce aux indications qui suivent, même par des garçons d'une douzaine d'années, pourvu qu'ils connaissent la formule de sommation des progressions géométriques. On a tout d'abord

$$\sum_{\lambda} (\lambda + 1) \, . \, 2^\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \, . \, 2^\lambda + \sum_{\lambda} 2^\lambda.$$

D'une part,

$$\sum_{\lambda}^{0\ldots n} 2^\lambda = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \, .$$

D'autre part, on peut représenter $\sum\limits_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \, . \, 2^\lambda$ de la manière que voici :

$$\begin{array}{rcccccccl}
\sum\limits_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \, . \, 2^\lambda = 0 + 1 \, . \, 2 + & 2 \, . \, 2^2 + & 3 \, . \, 2^3 + & 4 \, . \, 2^4 + & 5 \, . \, 2^5 + & \ldots + & n \, . \, 2^n \\
= \qquad 2 + & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \ldots + & 2^n \\
+ & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \ldots + & 2^n \\
 & + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \ldots + & 2^n \\
 & & + & 2^4 + & 2^5 + & \ldots + & 2^n \\
 & & & + & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
 & & & & & + 2^{n-1} + & 2^n \\
 & & & & & + & 2^n
\end{array}$$

Faisant la sommation de chaque ligne horizontale séparément, puis additionnant ces sommes partielles, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \, . \, 2^\lambda = {} & (2^{n+1} - 1) - 1 \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2) \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 4) \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1}).
\end{aligned}$$

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement $\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \, . \, 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \, . \, 2^{n+1}$.

On en déduit immédiatement $\sum_{\lambda}^{0\ldots n} (\lambda + 1) \, . \, 2^{\lambda} = 1 + n \, . \, 2^{n+1}$,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre n des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \, . \, 2^{\lambda+1}$$

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel).

Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel[1] et Turrière[2] sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions $\wp$ de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7^e^ exemple du 3^e^ livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique $(a - d, a, a + d)$ et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2 \, , \qquad 2a = t^2 \, , \qquad 2a + d = w^2 \; ;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2 \, , \qquad 41^2 \, , \qquad 41^2 + 720 = 49^2 \, .$$

---

[1] *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24e année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25e année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

[2] *L'Enseign. mathém.*, 17e année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.