

Autor(en): **Pasquier, L.-G. Du**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

infini d'aiguilles, la série T se confondrait avec celle des nombres impairs.

J'ai conseillé à mes jeunes gens de fabriquer pour leurs amis le jeu des 4 aiguilles avec quelque 15 à 20 disques. Dans la pratique, ce jeu donnera matière à beaucoup plus d'hésitations que le jeu classique de la tour d'Hanoï. C'est dire qu'il a chance de n'être pas moins amusant. Ils l'introduiront par un petit conte assyrien et l'ont baptisé déjà : le *jeu de la Ziggurat*.

Mon vieil ami L.-G. Du Pasquier, professeur à l'Université de Neuchâtel, auquel j'ai communiqué les pages ci-dessus a bien voulu répondre déjà au vœu que j'y exprime d'obtenir des mathématiciens une formule facile permettant de calculer T_n . Il m'a permis de joindre à ma communication le complément qui suit.

Pierre BOVET (Genève).

II. — Désignons par $t_{\lambda-1}$ le $\lambda^{\text{ième}}$ nombre triangulaire; d'après cela, $t_0 = 1$, $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $t_3 = 10$, $t_4 = 15$, en général : $t_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Soit n un nombre positif d'ailleurs quelconque; représentons par $E_2(n)$ le plus grand nombre triangulaire contenu dans n ; par exemple $E_2(2) = 1$; $E_2(\pi) = 3$; $E_2(9) = 6$; $E_2(10, 33) = 10$; etc. (Cette notation est une généralisation du symbole de Legendre: $E(n) =$ plus grand nombre *entier* contenu dans n ; nous posons donc par définition: $E_1(x) = E(x)$; $E_2(x) =$ le plus grand nombre triangulaire contenu dans x ; $E_3(x) =$ le plus grand nombre carré contenu dans x ; $E_4(x) =$ le plus grand nombre pentagonal contenu dans x ; et ainsi de suite).

Cela posé, tout nombre positif n peut se représenter, et d'une seule manière, sous forme d'une somme de deux termes

$$n = t_\lambda + r \quad (\text{a})$$

où $t_\lambda = E_2(n)$ est le plus grand nombre triangulaire contenu dans n , et r un nombre non négatif. Si, en particulier, n représente un nombre entier, par exemple le nombre des disques dans le jeu en question, on aura les décompositions suivantes :

$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
$t_\lambda = 1$	1	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	10	15	15 ...
$r = 0$	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1 ...
$\lambda = 0$	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4 ...

La série T_n est alors représentée par la formule

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \cdot 2^{\lambda+1}$$

La sommation de la série

$$1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \dots + (n + 1) \cdot 2^n = \sum_{\lambda}^{0\dots n} (\lambda+1) \cdot 2^\lambda.$$

qui intervient dans la formation des nombres T_n , peut être trouvée, grâce aux indications qui suivent, même par des garçons d'une douzaine d'années, pourvu qu'ils connaissent la formule de sommation des progressions géométriques. On a tout d'abord

$$\sum_{\lambda} (\lambda + 1) \cdot 2^\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \cdot 2^\lambda + \sum_{\lambda} 2^\lambda.$$

D'une part,

$$\sum_{\lambda}^{0\dots n} 2^\lambda = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

D'autre part, on peut représenter $\sum_{\lambda}^{0\dots n} \lambda \cdot 2^\lambda$ de la manière que voici :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}^{0\dots n} \lambda \cdot 2^\lambda &= 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^n \\ &= \begin{array}{cccccccc} 2 + & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & + & 2^2 + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & + & 2^3 + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & & + & 2^4 + & 2^5 + & \dots + & 2^n \\ & & & & & & + & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & + 2^{n-1} + 2^n \\ & & & & & & & & & + 2^n \end{array} \end{aligned}$$

Faisant la sommation de chaque ligne horizontale séparément, puis additionnant ces sommes partielles, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}^{0\dots n} \lambda \cdot 2^\lambda &= (2^{n+1} - 1) - 1 \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2) \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 4) \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\ &+ \dots \\ &+ (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement $\sum_{\lambda}^{0\dots n} \lambda \cdot 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \cdot 2^{n+1}$.

On en déduit immédiatement $\sum_{\lambda}^{0\dots n} (\lambda + 1) \cdot 2^{\lambda} = 1 + n \cdot 2^{n+1}$,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre n des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \cdot 2^{\lambda+1}$$

L.-G. DU PASQUIER (Neuchâtel).

Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel¹ et Turrière² sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions p de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7^e exemple du 3^e livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique $(a - d, a, a + d)$ et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2, \quad 2a = t^2, \quad 2a + d = w^2;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2, \quad 41^2, \quad 41^2 + 720 = 49^2.$$

¹ *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24^e année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25^e année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

² *L'Enseign. mathém.*, 17^e année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.