

# quartiques gauches.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

paraît résider dans le fait que le problème général posé au n° 2 conduit à la forme générale de la fonction  $F(z)$  donnée au n° 5.

Une recherche analogue et présentant même intérêt peut être faite pour le problème généralisé que nous venons d'indiquer.

Jassy, décembre 1916.

---

## NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(3<sup>e</sup> article)<sup>1</sup>

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

---

### Les quartiques gauches.

43. — MÉTHODE DU PLAN OSCULATEUR. — De même que, sur une cubique plane dont l'équation a ses coefficients rationnels, l'existence de deux arithmopoints quelconques entraîne *par alignement* celle d'un troisième arithmopoint, sur une quartique gauche d'équations rationnelles l'existence de trois arithmopoints particuliers quelconques entraîne celle d'un quatrième arithmopoint, trace de la courbe gauche sur l'arithmoplan défini par les trois arithmopoints connus.

Le plan défini par une tangente en un arithmopoint d'une quartique gauche et par un autre arithmopoint rencontre la courbe en un nouvel arithmopoint.

Enfin, le plan osculateur en un arithmopoint rencontre à nouveau la quartique gauche en un nouvel arithmopoint.

---

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique*, 18<sup>e</sup> année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428.

Cette remarque donne naissance à une méthode analogue à celle du *point tangentiel* pour les cubiques planes et permettant de rattacher par une voie itérative une suite d'arithmopoints à tout arithmopoint d'une quartique gauche. Cette méthode du *plan osculateur* consistera à partir d'un arithmopoint connu *a priori*  $M_1$ ; le plan osculateur à la quartique gauche en  $M_1$  rencontrera la courbe gauche en un second point  $M_2$ ; le plan osculateur en  $M_2$  donnera un autre arithmopoint  $M_3$  ... et ainsi de suite: de l'arithmopoint  $M_{k-1}$  se déduira un arithmopoint  $M_k$  qui sera la trace de la quartique sur le plan osculateur de  $M_{k-1}$ .

44. — LES ÉQUATIONS DES NOMBRES CONGRUENTS. — J'ai déjà<sup>1</sup> donné un exemple de l'application de la méthode du plan osculateur à l'occasion des équations indéterminées simultanées

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 + b = z^2.$$

Pour  $a + b = 0$  elles ne sont autres que les équations des nombres congruents qui ont donné lieu à des travaux remarquables de Léonard DE PISE, Edouard LUCAS, A. GENOCCHI et Mathew COLLINS. Impossibles pour  $a = 1, 2, 3, 10, 11, 17, 19, \dots$ , elles sont possibles pour  $a = 5, a = 6$ , par exemple.

Pour  $a = 5, b = -5$  ce sont les équations du problème proposé par Jean DE PALERME à Léonard DE PISE, qui en a donné la solution

$$x = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{41}{12}.$$

Pour  $a = 6, b = -6$ , on se trouve en présence d'un système d'équations étudié par Ed. LUCAS<sup>2</sup>. Partant de la solution simple :

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{7}{2}, \quad z = \frac{1}{2},$$

<sup>1</sup> Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise, *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, septembre-novembre 1915 (p. 315-324).

<sup>2</sup> Edouard LUCAS, *Sur la résolution des systèmes d'équations*  $x^2 - 6y^2 = u^2, x^2 + 6y^2 = v^2$ , *Nouvelles Annales de Mathématiques* [2], t. XV, 1876, p. 466-469.

Ed. LUCAS forme les nouvelles solutions moins évidentes :

$$x_1 = \frac{1201}{140}, \quad y_1 = \frac{1249}{140}, \quad z_1 = \frac{1151}{140},$$

$$x'_1 = \frac{2 \cdot 639 \cdot 802}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad y'_1 = \frac{10 \cdot 113 \cdot 607}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad z'_1 = \frac{4 \cdot 319 \cdot 999}{7 \cdot 776 \cdot 485};$$

les formules de récurrence qu'il indique ne sont d'ailleurs pas distinctes de celles que j'ai trouvées en application de la méthode du point tangentiel sur une cubique plane :

$$x_1 = \frac{ab - x^4}{2xyz}, \quad y_1 = \frac{x^2y^2 + az^2}{2xyz}, \quad z_1 = \frac{x^2z^2 + by^2}{2xyz}.$$

Des propositions générales sur l'impossibilité des équations des nombres congruents ont été données par A. GENOCCHI<sup>1</sup> (par exemple lorsque  $a$  est un nombre premier de la forme  $8m + 3$  ou le double d'un nombre premier de la forme  $8m + 5$ ); le même auteur s'est occupé d'ailleurs dans le même travail du cas  $a + b \neq 0$ . Elles ont aussi été considérées par Ed. LUCAS<sup>2</sup> dans ses recherches sur les travaux de Léonard DE PISE.

#### 45. — Les équations simultanées homogènes

$$x^2 + ay^2 = z^2,$$

$$ax^2 + y^2 = t^2,$$

ont été traitées de même<sup>3</sup>; pour  $a = 7$ , elles admettent une solution simple

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 4, \quad t = 8,$$

<sup>1</sup> A. GENOCCHI, *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1874, t. 78, p. 433-435.

<sup>2</sup> Ed. LUCAS, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure*, *Bollettino di bibliografia* (du prince Boncompagni), 1877. LUCAS cite Léonard de PISE, Lucas PACIOLI, L. EULER, Mathew COLLINS et A. GENOCCHI.

Au sujet des mêmes équations des nombres congruents, voir aussi la question n° 4472 de *l'Intermédiaire des mathématiciens* (1915, p. 52, et p. 231) par M. A. GÉRARDIN; on y trouve des listes étendues de valeurs de  $a$  pour lesquelles les équations sont possibles ou impossibles.

<sup>3</sup> *L'Intermédiaire des mathématiciens*, 1916, p. 63. L'auteur de la solution indique précisément la méthode du plan osculateur, ainsi que celle d'une quadrique ayant avec la courbe sept intersections confondues au point initial; le huitième point d'intersection est une nouvelle solution. Il traite ensuite la question au moyen des fonctions elliptiques d'un même paramètre  $u$  et signale toute une série de solutions de paramètres  $-3u$ ,  $-7u$ ,  $-11u$  ... déduites d'une solution initiale de paramètre  $u$ .

dont il est possible de déduire la solution

$$x = -447, \quad y = 1121, \quad z = 3004, \quad t = -1688.$$

M. A. GÉRARDIN<sup>1</sup> a d'ailleurs signalé un cas particulier de possibilité de cette équation. C'est celui pour lequel le nombre  $a$  est de la forme suivante :

$$a = \lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Dans ce cas, on peut prendre :

$$x = \lambda, \quad y = \lambda + 2, \quad z = \lambda^2 + 3\lambda + 4, \quad t = \lambda^2 + \lambda + 2.$$

Le cas de  $a$  carré a été traité par L. EULER en 1780<sup>2</sup>.

46. — Comme autre exemple, je signalerai encore celui du problème de la *détermination de deux parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles, équivalents et isodiagonaux*. On impose une des arêtes de l'un des volumes et deux arêtes de l'autre.

Soient  $x, y, c$  les arêtes de l'un des parallélépipèdes ;  $c$  est connu et  $x, y$  sont deux inconnues. Les arêtes du second volume seront de même  $a', b', z'$  ;  $a', b'$  sont donnés et  $z'$  est inconnu. Il s'agit alors d'étudier le système suivant d'équations entre  $x, y$  et  $z'$  :

$$\begin{cases} xyc = a'b'z' , \\ x^2 + y^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + z'^2 ; \end{cases}$$

elles représentent, par rapport à des axes coordonnés,  $(Ox, Oy, Oz')$  une biquadratique gauche intersection d'un parabolôïde hyperbolique avec un hyperbolôïde de révolution. Par la transformation définie au moyen des formules

$$X = \frac{c}{a'b'}(x + y),$$

$$Y = \frac{c}{a'b'}(x - y),$$

$$Z = \frac{c}{a'b'} \cdot z',$$

<sup>1</sup> *Loc. cit.*, p. 64.

<sup>2</sup> C. f. *Commentationes arithmeticae*, 1849, t. II, pp. 425-437.

et par conséquent constituée par une affinité et une rotation autour de  $Oz'$ , les équations de la biquadratique gauche deviennent :

$$X^2 = (Z + 1)^2 - K, \quad Y^2 = (Z - 1)^2 - K.$$

$K$  est une constante égale à  $\frac{(c^2 - a'^2)(c^2 - b'^2)}{a'b'^2}$ . Cette valeur particulière de  $K$  assure à la biquadratique transformée l'existence d'un arithmopoint particulier

$$X_0 = \frac{c(a' + b')}{a'b'}, \quad Y_0 = \frac{c(a' - b')}{a'b'}, \quad Z_0 = \frac{c^2}{a'b'},$$

correspondant à la solution banale constituée par deux parallélépipèdes égaux.

La méthode du plan osculateur pourra être appliquée à tout arithmopoint  $(x_0, y_0, z_0)$  de la biquadratique d'équations :

$$X^2 + k = (Z + 1)^2, \quad Y^2 + k = (Z - 1)^2,$$

le plan osculateur au point  $(x_0, y_0, z_0)$  ayant pour équation

$$-x_0^2 X + y_0^2 Y + 2(z_0^2 + 1 - K)Z = -6z_0(z_0^2 + 1 - K).$$

Je n'insiste pas sur ce problème qui peut être traité d'une autre manière et rattaché à des cubiques planes remarquables signalées par Edouard LUCAS. (Voir §§ 61, 62 et 63.)

Je pense que ces divers exemples, étudiés par une méthode très élémentaire, suffisent amplement pour justifier l'introduction de ces considérations d'arithmogéométrie. Ils prouvent d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser des résultats de la théorie des fonctions elliptiques pour aborder systématiquement l'étude de ces questions de théorie des nombres.

#### 47. — MÉTHODE DE LA QUADRIQUE PASSANT PAR SEPT POINTS.

— Une méthode analogue à celle du plan osculateur découle du fait bien connu que toutes les quadriques passant par sept points communs passent par un huitième point fixe.

Supposons qu'on connaisse sept arithmopoints particuliers d'une *biquadratique gauche* définie comme intersection de

deux quadriques  $Q_1 = 0$  et  $Q_2 = 0$ . On formera alors l'équation d'une quadrique passant par ces sept arithmopoints mais n'appartenant pas au faisceau ponctuel défini par les quadriques  $Q_1 = 0$  et  $Q_2 = 0$ . Soit  $Q_3 = 0$  une telle quadrique. Les équations simultanées

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0,$$

auront pour solutions les coordonnées d'un système de huit points, auxquels appartiendront les sept points connus *a priori*. De sorte que, de ces sept arithmopoints, ce procédé permettra de déduire un huitième arithmopoint.

Les sept arithmopoints initiaux peuvent être confondus en un seul arithmopoint : on possède donc une nouvelle méthode de récurrence entre arithmopoints d'une biquadratique gauche, absolument analogue à celle du plan osculateur.

48. — RÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉTUDE ARITHMOGÉOMÉTRIQUE D'UNE QUARTIQUE GAUCHE A CELLE D'UNE CUBIQUE PLANE. — Une autre voie est ouverte dans l'étude arithmogéométrique d'une quartique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels et douée d'un arithmopoint particulier connu *a priori*.

Cette étude n'est pas distincte, en effet, de celle d'une cubique plane, qui a fait l'objet des §§ 40, 41 et 42. La cubique plane associée à la quartique gauche n'est autre que la perspective de celle-ci, le point de vue se trouvant à l'arithmopoint connu *a priori*.

Pratiquement, on projetera la quartique gauche en prenant pour centre de projection l'arithmopoint connu *a priori* sur un plan de projection dont le choix sera effectué, dans chaque cas particulier, par des considérations de symétrie, d'élégance ou de simplicité des équations.

La cubique plane perspective de la quartique de l'espace admet pour arithmopoint particulier la trace sur le plan de projection de l'arithmodroite tangente à la quartique au point de vue.

C'est ainsi que les équations des nombres congruents

$$x^2 + a = y^2, \quad x^2 + b = z^2$$

ont pu de diverses manières être ramenées à une équation représentant une cubique plane douée d'arithmopoints<sup>1</sup>.

49. — PROBLÈME DE FERMAT : ARITHMOTRIANGLES PYTHAGORIQUES DONT L'HYPOTÉNUSE ET LA SOMME OU LA DIFFÉRENCE DES CATHÈTES SONT DES NOMBRES CARRÉS PARFAITS. — L'étude des triangles pythagoriques à côtés rationnels dont l'hypoténuse est mesurée par un carré et dont la somme des cathètes est un carré a été faite par LEIBNIZ<sup>2</sup>, FERMAT, EULER<sup>3</sup> et LAGRANGE. La plus petite solution de ce problème est constituée par le triangle dont les cathètes ont pour mesures :

$$1 \cdot 061 \cdot 652 \cdot 293 \cdot 520 \ .$$

$$4 \cdot 565 \cdot 486 \cdot 027 \cdot 761 \ .$$

La somme des cathètes est le carré du nombre  $2 \cdot 372 \cdot 159$  ; l'hypoténuse est égale à  $(2 \cdot 165 \cdot 017)^2$ .

Je vais appliquer les considérations qui précèdent au problème beaucoup plus général des arithmotriangles pythagoriques dont l'hypoténuse et la *somme ou la différence* des cathètes sont mesurées par des nombres carrés parfaits.

Soient  $x, y$  deux nombres rationnels algébriques dont les valeurs absolues sont par convention les rapports des cathètes à l'hypoténuse d'un triangle de cette espèce. Il s'agit ainsi de procéder à l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \quad x + y = z^2 \ ,$$

admettant les solutions banales ( $x = 1, y = 0, z = 1$ ) ( $x = 0, y = 1, z = 1$ ). Ces équations représentent respectivement un cylindre de révolution et un cylindre parabolique, de sorte que leur ensemble représente une biquadratique gauche douée d'un arithmopoint particulier, dont il est possible par symétries de déduire trois autres arithmopoints.

<sup>1</sup> Cf. *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, 1915, p. 317 et 321.

<sup>2</sup> Je cite LEIBNIZ d'après EULER : « Hoc problema a Leibnizio olim propositum » [Commentationes arithmeticae, t. II, p. 44-52, Miscellanea analytica, 15 novembre 1773, § 4, p. 47-48].

<sup>3</sup> L. EULER a consacré deux mémoires à ce problème :

a) De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, 18 mai 1780; Commentationes arithmeticae, édition de 1849, t. II, p. 397-402. La solution particulière rapportée dans le texte ci-dessus est indiquée dans cette pièce.

b) Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa liquadratum, ad mentem Ill. Lagrange adornata, 5 juin 1780; Commentationes arithmeticae, ibid., pp. 403-405.



La distinction entre les solutions des deux problèmes distincts qui se traduisent par ces mêmes équations se fait aisément. Les nombres  $(x, y)$  peuvent, en effet, être soit tous deux positifs, soit de signes contraires. Dans le premier cas, on se trouve en présence du problème de Fermat proprement dit ; pour  $x$  et  $y$  de signes contraires, c'est la différence des cathètes qui est mesurée par un carré parfait. D'ailleurs, le seul examen de  $z$  permet d'effectuer autrement la même distinction ; il résulte, en effet, de l'équation

$$2xy = z^2 - 1 ,$$

que les solutions du problème de Fermat proprement dit correspondent aux arcs de la biquadratique extérieurs à l'espace limité aux deux plans parallèles  $z = \pm 1$ . Les arithmopoints de la biquadratique situés entre ces deux plans parallèles sont au contraire associés à des arithmotriangles pythagoriques pour lesquels la différence des cathètes est un carré parfait.

Le cône du troisième degré admettant la biquadratique considérée pour courbe directrice, le sommet étant l'arithmopoint  $(x = 1, y = 0, z = 1)$ , a pour équation par rapport à des axes issus de son sommet et parallèles aux axes primitifs :

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2Z) + 2XZ^2 = 0 ;$$

de sorte que la cubique d'équation

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2) + 2X = 0$$

est une perspective de la biquadratique gauche. La correspondance entre les nombres  $(x, y, z)$  et  $(X, Y)$  s'effectue par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{Y^2 - X^2}{Y^2 + X^2} , \quad y = -\frac{2XY}{X^2 + Y^2} , \quad z = X + Y - 1 , \\ X = \frac{x - 1}{z - 1} , \quad Y = \frac{y}{z - 1} . \end{array} \right.$$

La séparation entre les arcs associés aux deux problèmes considérés se fait au point à l'infini de cette cubique circu-

laire, au point à distance finie d'intersection avec l'asymptote  $X + Y = 2$ , à l'origine  $O$  des coordonnées et au point autre que  $O$ , situé à distance finie, d'intersection avec la parallèle menée par  $O$  à cette asymptote. Les deux arcs compris entre ces deux droites parallèles ( $X + Y = 0$ ,  $X + Y = 2$ ) correspondent à la différence des cathètes, tandis que les deux autres arcs extérieurs à ces deux droites parallèles correspondent au problème de Fermat. Deux arithmopoints alignés avec le point  $O$  correspondent toujours au même problème.

Une des solutions remarquables de la question, ainsi trouvée au moyen des alignements sur cette cubique, est celle qui correspond au triangle rectangle de côtés 119, 120 et 169.

La méthode du plan osculateur peut aussi être appliquée avec intérêt à la biquadratique étudiée. Pour simplifier les calculs, il est avantageux d'introduire une variable auxiliaire  $\delta$  définie par la relation

$$x - y = 2\sqrt{\delta} ;$$

de sorte que l'on doit poser :

$$x = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{\delta} ,$$

$$y = \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{\delta} ,$$

$$z^4 = 2 - 4\delta .$$

Avec ces notations, l'équation du plan osculateur de la biquadratique au point de coordonnées  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  et du paramètre  $\delta_0$  est :

$$(2x_0\delta_0 + z_0^2)x + (2y_0\delta_0 + z_0^2)y - 2z_0^3z = 6\delta_0 - 2 .$$

Ce plan osculateur rencontre à nouveau la courbe gauche en un point de cote  $z_1$ , dont l'expression peut être donnée en fonction de  $z$  seul,

$$z_1 = z \cdot \frac{-12 + 12z^4 + z^8}{4 + 12z^4 - 3z^8} ,$$

ou, plus simplement, en fonction de  $z$  et de  $\delta$  :

$$z_1 = z \cdot \frac{1 - 4\delta + \delta^2}{1 - 3\delta^2} .$$

Les paramètres  $\delta$  et  $\delta_1$  sont liés entre eux par la relation

$$\pm \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}} = \frac{\delta^4 + 12\delta^3 - 18\delta^2 + 12\delta - 3}{(3\delta^2 - 1)^2}.$$

On observera enfin que la condition  $z^2 - 1 > 0$ , caractéristique des solutions du problème primitivement étudié par FERMAT se traduit ici par l'inéquation  $\delta < \frac{1}{4}$ .

La solution banale  $x = 1, y = 0, z = 1$  correspond précisément au cas limite  $\delta = \frac{1}{4}$ ; elle appartient d'ailleurs indifféremment aux deux problèmes. La formule de récurrence ci-dessus écrite, entre  $\delta_1$  et  $\delta$ , donne alors pour  $\delta = \frac{1}{4}$  la valeur suivante de  $\delta_1$  :

$$\delta_1 = \frac{57 \cdot 121}{114 \cdot 244}$$

qui, supérieure à  $\frac{1}{4}$ , correspond au second problème; elle conduit à la solution

$$x_1 = -\frac{119}{169}, \quad y_1 = \frac{120}{169}, \quad z_1 = \frac{1}{13},$$

déjà signalée à propos de la cubique perspective de la biquadratique gauche.

### Généralisation des équations de Brahmagupta-Fermat.

50. — L'étude des équations  $Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$  dans lesquelles  $f(xy)$  est un polynôme quelconque du second degré des deux variables  $x$  et  $y$  se ramène immédiatement à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche par l'introduction d'une nouvelle variable auxiliaire. Une telle équation

$$Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$$

peut, en effet, être considérée comme représentant dans le plan  $Oxy$  une courbe du quatrième degré, projection d'une