Antinomie de Burali-Forti.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Propriété I. — L'existence d'un ensemble entraîne celle de tous ses sous-ensembles[1].

En vertu de cette propriété, il suffit de montrer que V′ n'existe pas pour en conclure immédiatement qu'il doit en être de même des ensembles V, R′ et R.

Antinomie de Burali-Forti.

4. — Burali-Forti arrive, comme on le sait, à l'antinomie qui porte son nom[2] par la considération des types d'ordre d'ensembles bien ordonnés (nombres ordinaux de Cantor). Je rappelle que ces nombres se succèdent suivant une loi déterminée, et forment une sorte de chaîne dont les premiers chaînons sont les suites finies de 1 (suite ou ensemble impropre), 2, ... n, ... éléments, puis la suite ω, et les types d'ordre $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + n$, etc.

Les propriétés des ensembles bien ordonnés sont très bien connues. Je me bornerai à en rappeler les deux suivantes qui nous seront particulièrement utiles :

a) Tout ensemble bien ordonné infini est semblable à l'ensemble de tous ses segments. Cette propriété est encore vraie pour les ensembles finis et, par conséquent, pour tous les ensembles bien ordonnés, si l'on adjoint à l'ensemble des segments un segment fictif dont le type d'ordre est 0, par définition. Je le désignerai par la lettre e. Il en résulte que tout nombre ordinal π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$, y compris 0.

b) Un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments.

Ceci rappelé, envisageons avec Burali-Forti l'ensemble W de tous les nombres ordinaux de Cantor.

L'ensemble W ainsi défini n'existe pas. En effet, si W existait, il serait bien ordonné et aurait un type d'ordre π (cf. introduction) ; or, tout nombre π est un élément de W, et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$ est un segment

---

[1] Cf. J. König : *loc. cit.*, chap. VI, § 16.

[2] Burali-Forti : *Una questione sui numeri transfiniti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 11 (1897), p. 154.

de W. L'ensemble de Burali-Forti serait donc, en vertu de (*a*), semblable à l'un de ses segments ; conclusion absurde, en vertu de (*b*).

Telle est l'antinomie de Burali-Forti, la plus ancienne et peut-être la plus importante des antinomies cantoriennes connues.

Il semblerait à première vue qu'on s'appuie implicitement, dans l'antinomie de Burali-Forti, sur le postulat suivant : tous les nombres ordinaux de Cantor existent. En réalité, l'antinomie signalée par Burali-Forti est indépendante de ce postulat ; pour s'en assurer, il suffit d'envisager l'ensemble de tous les nombres ordinaux *existants*. En effet, si un nombre ordinal π existe, il en est de même, en vertu de la propriété I, de tous les nombres ordinaux $\alpha < \pi$, et, par conséquent, tout nombre existant π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux *existants* inférieurs à π. Le raisonnement de Burali-Forti s'applique sans modification, et l'on retombe sur la même antinomie qu'auparavant. Nous désignerons par W l'ensemble de tous les nombres ordinaux existants.

Je ferai remarquer que l'antinomie de Burali-Forti ne dépend que des relations d'ordre de W. Or les relations d'ordre d'un ensemble sont transmises à tout ensemble équivalent. D'où cette propriété.

Propriété II. — Un ensemble n'existe pas, s'il est équivalent à l'ensemble W de Burali-Forti.

Et, d'une manière plus générale (en vertu de la propriété I) : Un ensemble n'existe pas s'il contient un sous-ensemble équivalent à W.

Je vais maintenant donner une forme un peu différente à l'exemple de Burali-Forti que je viens de rappeler.

5. — Soit E un ensemble bien ordonné quelconque, et E′ l'ensemble de tous ses segments, y compris le segment *e* (voir le paragraphe précédent). En vertu de la propriété (*a*), E′ est semblable à E. Remplaçons les segments dont se compose E′ par les ensembles des segments de ces segments, et appliquons une transformation analogue aux segments introduits de cette manière, et ainsi de suite. A chaque

ensemble bien ordonné E correspond ainsi un ensemble d'une forme particulière que j'appellerai ensemble S (lettre initiale du mot segment, pour rappeler le rôle joué par les segments dans cette transformation).

Le segment fictif *e* subsiste seul après cette transformation. On voit qu'un même ensemble S correspond à tous les ensembles bien ordonnés du même type d'ordre α. Je le désignerai par α_s, et je dirai que le nombre ordinal α est le *rang* de l'ensemble α_s.

Par exemple les ensembles S qui dérivent des ensembles bien ordonnés des types 1, 2 et 3 s'écrivent

$$(e);\ (e,\ (e));\ (e,\ (e),\ (e,\ (e))).$$

L'élément *e* sera considéré comme indécomposable.

Il résulte de la définition précédente que les éléments d'un ensemble S sont également des *ensembles* S.

Je dis maintenant que tout ensemble S est un ensemble ordinaire à un seul noyau *e*. En effet, dans les descentes auxquelles donne lieu un ensemble S, on parcourt une suite de segments s'emboîtant les uns dans les autres, et l'on sait que les suites de ce genre sont toujours finies.

Toute descente prend nécessairement fin et aboutit à l'élément *e*.

Les ensembles S sont donc bien des ensembles ordinaires. Il en résulte entre autres qu'un ensemble S ne saurait être isomorphe à l'un de ses éléments.

Soient maintenant deux ensembles bien ordonnés quelconques, E et F, et soient E_s, F_s les ensembles S correspondants. Deux cas sont possibles : ou bien les ensembles E et F sont semblables, ou bien l'un d'eux (par exemple E) est semblable à un segment de l'autre (ensemble F).

Nous avons vu que dans le premier cas $E_s = F_s$; dans le deuxième cas, E_s est isomorphe et même égal à un élément F_s.

Ceci établi, revenons à l'antinomie de Burali-Forti. Soit W′ l'ensemble de tous les α_s existants. Je dis que l'ensemble W′ n'existe pas.

Première hypothèse : A tout nombre existant α correspond

un ensemble existant α_s. L'ensemble W′ est alors équivalent à W ; il n'existe pas, en vertu de la propriété II.

Deuxième hypothèse : L'existence d'un nombre α n'entraîne pas nécessairement celle de l'ensemble α_s. Soit alors π le plus petit nombre tel que π_s n'existe pas. Aucun α_s n'existe pour $\alpha > \pi$, car l'existence d'un ensemble α_s pour $\alpha > \pi$ entraînerait celle de π_s, qui est un élément de α_s ; par conséquent, W′ est l'ensemble des α_s de rangs inférieurs à π; donc $W' = \pi_s$. W′ n'existe pas, puisque π_s n'existe pas.

Il est facile maintenant de rapprocher l'exemple de Burali-Forti de celui de Russell. En effet, l'ensemble R est relié à W par l'intermédiaire des ensembles R′, V, V′ et W′. Or l'ensemble R′ est un sous-ensemble de R ; l'ensemble V, un sous-ensemble de R′; tout ensemble V′, un sous-ensemble de V ; et, enfin, l'ensemble W′, un sous-ensemble d'un V′. Les ensembles R, R′,... W′ forment donc une suite d'ensembles s'emboîtant les uns dans les autres. Il en résulte qu'il suffit de montrer que l'ensemble de Burali-Forti n'existe pas pour en conclure qu'il doit en être de même de chacun des ensembles R, R′,... W′. Cela est vrai, comme nous l'avons vu, de l'ensemble W′, et, en vertu de la propriété I, cela est vrai encore de chacun des ensembles R, R′, V et V′. Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer à ces ensembles le raisonnement de Russell ; chacun des résultats partiels que nous avons obtenus d'une manière directe peut être considéré comme une conséquence de l'antinomie de Burali-Forti.

6. — Je ferai remarquer encore qu'on peut définir les ensembles S sans passer par l'intermédiaire des ensembles bien ordonnés. Soit E un ensemble S. Nous avons vu que :

1. L'ensemble E est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau *e*).
2. Si x et y sont deux éléments quelconques de E, l'un d'eux est un élément de l'autre.

En outre :

3. Si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E.

Ces propriétés sont caractéristiques des ensembles S, et peuvent servir à les définir. On démontre immédiatement

que les ensembles E ainsi définis sont bien les ensembles S du paragraphe précédent. A tout ensemble E correspond un type d'ordre déterminé, et l'ensemble de tous les ensembles E ne diffère pas de l'ensemble W'.

Solution du problème fondamental dans le cas d'ensembles ordinaires.

7. — L'étude des différentes antinomies que nous avons rencontrées jusqu'ici a mis en évidence les faits suivants : dans chacun de nos exemples, il est possible de former des ensembles de plus en plus vastes, mais l'ensemble de *tous* les individus n'existe pas ; quel que soit l'ensemble qu'on envisage (pourvu qu'il existe), des individus nouveaux surgissent, et un ensemble plus vaste apparaît nécessairement ; on est bien en présence d'une extension indéfinie qui ne comporte pas d'arrêt ou borne. En traitant le problème fondamental, je serai amené à préciser cette notion un peu vague de borne et d'absence de borne.

Rappelons à ce propos qu'on trouve dans les ouvrages cités au commencement de ce travail une analyse logique et psychologique approfondie des antinomies cantoriennes et de la notion d'ensemble ; je n'en aurai pas besoin pour le but que j'ai en vue.

Nous supposerons que les ensembles ordinaires E que nous aurons à envisager dans l'étude du problème fondamental vérifient les deux conditions suivantes :

Condition (a). — Les éléments de E sont distincts ; il en est de même des éléments de chacun de ces éléments, et ainsi de suite. Par cette condition je n'écarte pas les ensembles E qui ont des éléments isomorphes ni ceux dont les éléments-ensembles contiennent des éléments isomorphes, etc. L'identité seule est exclue.

Condition (b). — Les noyaux $e, f, g, \ldots$ de tout ensemble E font partie d'un ensemble $N = (e, f, g, \ldots)$ que nous considérerons comme donné ou connu (cf. paragraphe 3).

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour