

III. — L'équation $x + a^2 = y^2$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'une manière pareille on peut faire usage de l'équation (II), quand on a déterminé la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci.

Ainsi on trouvera pour $a = 15$:

Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 2a = 30 = 1 + 29 & \text{donne} & 1.29 + 14^2 = 15^2 \\
 & & 7 + 23 & 7.23 + 8^2 = 15^2 \\
 & & 11 + 19 & 11.19 + 4^2 = 15^2 \\
 & & 13 + 17 & 13.17 + 2^2 = 15^2 .
 \end{array}$$

Le nombre des relations est $\varphi(a) : 2$.

3^e cas. — Le nombre donné étant pair, l'équation (I) ne donne aucune équation primitive, et, par conséquent, nous n'aurons *aucune solution*.

Pour avoir des solutions d'après (II), il faut encore connaître la première moitié des nombres inférieurs à $2a$ et premiers avec celui-ci. Soit $a = 12$, $2a = 24 = 2^3.3$, on a $\varphi(24) = 2^2(2 - 1)(3 - 1) = 8$.

Exemple.

$$\begin{array}{rcl}
 2a = 24 = 1 + 23 & \text{donne} & 1.23 + 11^2 = 12^2 \\
 & & 5 + 19 & 5.19 + 7^2 = 12^2 \\
 & & 7 + 17 & 7.17 + 5^2 = 12^2 \\
 & & 11 + 13 & 11.13 + 1^2 = 12^2 .
 \end{array}$$

Le nombre des solutions devient $\varphi(2a) : 2$.

III. — L'équation $x + a^2 = y^2$.

Les équations (I) et (II) nous donneront aussi, pour un a donné, des solutions de cette équation. On aura à traiter, comme plus haut, les trois cas différents désignés.

1^{er} cas. — En se servant de l'équation (I), il faut écrire le nombre premier donné, a , comme une différence entre deux nombres impairs et premiers entre eux. Mais cela pourra se faire d'innombrables manières. Les nombres de 1 à $a - 1$ sont premiers avec a , et, par conséquent, on peut les poser pour q , comme nombres à soustraire, dans l'équation $a = p - q$, quand pour p on met $a + q$.

Exemple.

$a = 7 = 8 - 1$	donne	$4.1.8 + 7^2 = 9^2$
$9 - 2$		$4.2.9 + 7^2 = 11^2$
$10 - 3$		$4.3.10 + 7^2 = 13^2$
$11 - 4$		$4.4.11 + 7^2 = 15^2$
$12 - 5$		$4.5.12 + 7^2 = 17^2$
$13 - 6$		$4.6.13 + 7^2 = 19^2$

On peut *continuer à l'infini* en ajoutant des multiples de 7. Ainsi nous aurons :

$15 - 8$	donne	$4-8-15 + 7^2 = 23^2$
$16 - 9$		$4-9-16 + 7^2 = 25^2$
$17 - 10$		$4-10-17 + 7^2 = 27^2$
etc.		etc.

Usant de l'équation (II), il nous faut décomposer a en $\frac{p-q}{2}$, ou $2a$ en $p - q$. Pour $a = 7$, $2a = 14$, on doit donc poser pour q les $\varphi(14)$, ou 6, nombres qui sont inférieurs à 14 et premiers avec ce nombre, savoir 1, 3, 5, 9, 11, 13.

Exemple.

$2a = 14 = 15 - 1$	donne	$1.15 + 7^2 = 8^2$
$17 - 3$		$3.17 + 7^2 = 10^2$
$19 - 5$		$5.19 + 7^2 = 12^2$
$23 - 9$		$9.23 + 7^2 = 16^2$
$25 - 11$		$11.25 + 7^2 = 18^2$
$27 - 13$		$13.27 + 7^2 = 20^2$
$29 - 15$		$15.29 + 7^2 = 22^2$
$31 - 17$		$17.31 + 7^2 = 24^2$
$33 - 19$		$19.33 + 7^2 = 26^2$
etc.		etc.

2^e cas. — Quand on a pour a un nombre composé impair, on procède comme plus haut; il faut, toutefois, commencer par la détermination des nombres qui se trouvent inférieurs à a et premiers avec celui-ci.

3^e cas. — Ayant pour a un nombre pair, l'équation (I) ne donnera aucune solution primitive.

Par contre, l'équation (II) nous donnera *d'innombrables solutions*. Pour $a = 18$, nous avons $2a = 36$, et les $\varphi(36)$, ou 12, nombres inférieurs à 36 et premiers avec lui, sont 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, d'où suit :

Exemple.

$2a = 36 = 37 - 1$	donne	$1.37 + 18^2 = 19^2$
$41 - 5$		$5.41 + 18^2 = 23^2$
$43 - 7$		$7.43 + 18^2 = 25^2$
$47 - 11$		$11.47 + 18^2 = 29^2$
.
.
<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>		<hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/>
$73 - 37$		$37.73 + 18^2 = 55^2$
$77 - 41$		$41.77 + 18^2 = 59^2$
etc.		etc.

IV. — L'équation $a^2 + x^2 = y^2$.

(« Equation pythagorique »).

Les nombres pythagoriques se laissent déterminer de la plus simple manière à l'aide des équations (I) et (II), si l'on pose, seulement, pour p et q des nombres carrés correspondants, et en employant, *dans le premier terme*, successivement tous les nombres carrés.

Exemple. $4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 60^2$ donne les couples de facteurs :

$$\begin{array}{cccc} 1^2, & 2^2, & 3^2, & 5^2 \\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 & 3^2 \cdot 5^2 & 2^2 \cdot 5^2 & 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

dont on aura

$$\begin{array}{l} 60^2 + 899^2 = 901^2 \\ 60^2 + 221^2 = 229^2 \\ 60^2 + 91^2 = 109^2 \\ 60^2 + 11^2 = 61^2 . \end{array}$$

On trouve toutes les valeurs cherchées, en employant seulement l'équation (II), où successivement on met dans le premier terme tous les nombres *impairs* de toute la suite des nombres. Si a est un nombre composé, il faut le décomposer en ses facteurs premiers, et de ceux-ci on doit former, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, tous les couples des facteurs, p et q , premiers entre eux, qui se peuvent faire.

V. — L'équation $x^2 + y^2 = a^2$.

Si cette équation doit être primitive, elle ne peut être satisfaite que par des valeurs impaires de a , et seulement