K. Hensel. — Zahlentheorie. — 1 vol. in-8° de xii-356 pages, 10 M.; G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin und Leipzig, 1913.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

J. Haag — **Cours complet de mathématiques spéciales.** Trois volumes gr. in-8° avec trois volumes d'exercices résolus ou proposés. Tome I. — *Algèbre et analyse.* Vol. de VI-402 p. avec 44 fig.; 1914; 9 fr. — *Exercices du tome I.* Vol. de VI-220 p. avec 14 fig.; 1914; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

On est assez étonné, par ce temps de mathématiques générales à outrance, de voir paraître un cours de mathématiques spéciales, et surtout un cours qui a la prétention d'être complet. Il faut presque faire un effort pour se rappeler que des élèves de mathématiques spéciales existent encore et qu'on ne peut leur donner l'enseignement intuitif des mathématiques générales; ils se l'assimileraient trop facilement et, interrogés là-dessus, répondraient encore trop facilement ! Comment pourrait-on se sortir alors des concours d'admission à nos grandes écoles ? M. Haag n'a pas été si ironique; il a même pris la chose très au sérieux et nous présente un cours fort moderne, d'autant plus moderne même que les derniers en date semblent s'effacer dans la nuit des temps.

L'arrangement des matières est particulièrement heureux. L'Analyse infinitésimale a la première place et c'est fort naturel, car il est beaucoup plus simple de calculer des intégrales élémentaires que d'étudier, par exemple, la transformation des équations algébriques; mais les anciens auteurs n'osaient pas être aussi naturels que cela. Il est même plus simple d'intégrer les différents éléments provenant de la décomposition d'une fonction rationnelle que de former ces éléments en partant d'une fraction quelconque. Et l'auteur ne peut être que félicité d'avoir respecté l'ordre ainsi indiqué D'ailleurs le souci pratique est constamment visible. Après les critères de convergence concernant les séries, nous trouvons quelques raisons intuitives destinées à indiquer aux débutants qu'ils ne doivent pas attendre indifféremment les mêmes services de tous ces critères. Les infiniment petits sont fort bien définis par continuité. Et quand, dans la seconde moitié du volume, nous arrivons à l'Algèbre proprement dite, nous y trouvons une parfaite élégance. Le théorème de Bezout sur l'élimination est ramené à son idée essentielle qui est simple ; ce n'est qu'ensuite que nous voyons les difficultés particulières qui peuvent se présenter, et ainsi elles n'obscurcissent pas tout de suite ce Mémoire fameux et redoutable.

En résumé, ce cours est fort clair, peu encombré d'inégalités, on y calcule beaucoup et le souci de faire résoudre un grand nombre d'exercices est suffisamment attesté par le fait de les publier à part, en volumes séparés. Ces problèmes sont intéressants, d'une part parce que beaucoup sont simples et immédiatement faisables par des procédés harmonieux que l'on peut suivre *sur des figures,* quoiqu'il ne s'agisse ici que d'algèbre et d'analyse, et cela est vraiment très bien. D'autre part, certains problèmes initient sans longueurs à des théories qui n'ont pu être traitées dans le corps de la partie didactique.

Une grande symétrie règne partout. Il ne serait point étonnant que cet ouvrage devienne rapidement classique. A. Buhl (Toulouse).

K. Hensel. — **Zahlentheorie.** — 1 vol. in-8° de XII-356 pages, 10 M.; G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin und Leipzig, 1913.

Dès ses premiers travaux M. Hensel a cherché à utiliser et à mettre en lumière les analogies qui existent entre les propriétés des nombres et celles des fonctions. Cette tendance apparaît dans ses remarquables recherches

sur la théorie des fonctions algébriques, où les considérations arithmétiques jouent un si grand rôle ; elle s'accentue dans ses travaux arithmétiques et surtout dans sa théorie des nombres algébriques, dont il a donné il y a cinq ans un exposé détaillé dans son livre « Theorie des algebraischen Zahlen », analysé ici-même par M. Dumas (Cf. *Ens. Math.*, 1910, p. 440) ; elle se dessine plus nettement encore dans son ouvrage récent « Zahlentheorie », consacré aux éléments de la théorie des nombres. Certes, quelques-unes des analogies utilisées par M. Hensel avaient été aperçues avant lui, mais personne ne s'en était servi d'une manière aussi systématique.

Pour rapprocher ces deux domaines, apparemment si distincts : la théorie des nombres et la théorie des fonctions, M. Hensel, comme l'a très bien expliqué M. Dumas dans sa note de l'*Ens. Math.*, emprunte à la théorie des fonctions son instrument de recherches le plus puissant : les développements en série, qui lui fournissent ses fameux développements ou nombres *g-adiques*. C'est en partant de cette notion aussi simple que féconde que M. Hensel réussit à reconstituer les éléments de la théorie des nombres et la théorie des corps algébriques, et parvient en particulier à la conception profonde de ses diviseurs, équivalente, à un certain point de vue, à celle d'idéal de Dedekind.

Dans son nouvel ouvrage M. Hensel parcourt un domaine moins vaste : il s'en tient, comme nous l'avons déjà dit, aux éléments de la théorie des nombres, mais ses méthodes de recherches s'appliquent encore à l'étude des corps plus élevés, et rien ne serait plus facile que de passer de ces éléments à la théorie des nombres algébriques. Aussi le livre de M. Hensel pourrait-il servir d'introduction à sa « Theorie der algebraischen Zahlen », mais sa portée est plus grande : dans le domaine restreint qu'il embrasse, il est infiniment plus complet et abonde en idées et conceptions nouvelles.

Pour M. Hensel, le problème fondamental de la théorie des nombres est la recherche des relations (Beziehungen) qui existent entre tous les nombres rationnels m et un nombre fixe mais quelconque g, qu'il appelle « *Grundzahl* » ou module. Ce qu'il importe de savoir c'est donc la manière dont les nombres m se comportent vis-à-vis du module g.

Dans certains problèmes très élémentaires, un nombre m peut être remplacé par son reste module g, mais dans l'étude de questions plus complexes cette donnée pourrait ne pas suffire : un nombre m n'est caractérisé d'une manière complète par rapport au module g que par la suite totale des termes que fournit son développement en série suivant les puissances croissantes du module g. On voit que les nombres *g-adiques* peuvent être introduits de la manière la plus naturelle dès le début de la théorie des nombres.

Nous voilà donc en présence d'un ensemble de symboles, car les nombres *g-adiques* ne sont en général que des symboles, ensemble plus vaste que le corps des nombres rationnels dont on est parti. Ces symboles peuvent être soumis au calcul : on peut les ajouter, les soustraire, les multiplier les uns par les autres, sans sortir de l'ensemble des nombres *g-adiques*. Cet ensemble forme donc un domaine holoïde ou un anneau, qui, dans le cas où g est un nombre premier p et où la division est toujours possible, devient un domaine orthoïde ou un corps.

Mais M. Hensel montre que l'anneau des nombres *g-adiques* peut être décomposé en corps relatifs aux différents facteurs premiers de g, ce qui permet de ramener l'étude des nombres *g-adiques* quelconques à celle beaucoup plus simple des corps *p-adiques*.

Une notion importante, celle d'ordre, permet de rapprocher encore davantage la théorie de ces corps de celle des fonctions. M. Hensel appelle ordre d'un nombre *p-adique* le degré de son premier terme par rapport à p. Cet ordre peut être négatif, nul ou positif.

Soient maintenant deux nombres *p-adiques* A et A′ d'ordres ρ et ρ' ; on dira que A est plus petit que A′, si ρ est supérieur à ρ'. En vertu de cette convention, un nombre variable *p-adique* est d'autant plus petit que son ordre est plus grand, et sa grandeur ou son rang relatif est donné non pas par son ordre ρ, mais par l'inverse de ρ. Rien ne nous empêche maintenant d'introduire dans la théorie de ces corps les notions et les procédés du calcul infinitésimal : les notions de continuité, de convergence, de dérivée, etc., et d'étudier relativement à p les fonctions algébriques ou transcendantes envisagées dans l'analyse. Le parallélisme entre l'arithmétique et la théorie des fonctions s'accentue de plus en plus : c'est ainsi que l'étude de la fonction exponentielle fournit à M. Hensel une expression des nombres *p-adiques*, analogue à la relation classique $A = e^{\gamma}$, où $\gamma = lgA$; mais ici le facteur exponentiel ne figure pas seul, — il est nécessaire d'introduire deux autres facteurs de nature différente : une puissance de p et une puissance d'une racine $(p-1)^e$ de l'unité. Un nombre *p-adique* est donc caractérisé par trois indices, et c'est l'ensemble de ces trois indices que M. Hensel appelle *logarithme* du nombre A. La portée et l'utilité de cette notion est comparable à celles des logarithmes ordinaires, et il serait intéressant de la rapprocher aussi de ces expressions logarithmiques dont Kummer s'était servi dans ses belles recherches sur le théorème de Fermat et les lois de réciprocité.

Les notions introduites par M. Hensel simplifient singulièrement l'étude des congruences et des équations binômes ; elles permettent aussi d'approfondir la théorie des nombres *g-adiques*. En effet la plupart des résultats établis pour les corps *p-adiques*, s'étendent, avec des modifications légères, aux anneaux *g-adiques;* en particulier le logarithme d'un nombre *g-adique* est représenté aussi par une suite d'indices, mais au lieu de trois indices isolés, cette suite se compose de trois systèmes ou cortèges d'indices; à part cette différence, les propriétés des logarithmes subsistent, et les questions relatives aux congruences ou aux équations binômes se traitent à l'aide de méthodes analogues.

Les deux derniers chapitres du livre de M. Hensel sont consacrés à la loi de réciprocité et à l'étude des formes quadratiques binaires et ternaires. Examinées à la lumière des belles méthodes de M. Hensel, ces questions, depuis longtemps classiques, apparaissent sous un aspect inattendu et nouveau.

Je ne saurais, même brièvement, indiquer tous les sujets abordés par M. Hensel dans cette arithmétique *g-adique*, où sa pensée se meut avec aisance et souplesse, qui en rendent la lecture particulièrement attrayante et facile. Malgré l'originalité de ses méthodes et la variété des problèmes qui y sont traités, ce livre, pour être pleinement compris, n'exige aucune préparation spéciale. D. Mirimanoff (Genève).

J. Knoblauch. — **Grundlagen der Geometrie.** — 1 vol. in-8, 634 p. ; 18 M. : B. G. Teubner, Leipzig.

M. Knoblauch, professeur à l'Université de Berlin, a publié il y a 25 ans, une introduction à la Géométrie des surfaces. Depuis cette époque il n'a