II

ception métaphysique des plus audacieuses — celle des *atomes du temps* — émise par les philosophes arabes de l'école des « Mutakallimun » renaît, basée sur les expériences relatives au rayonnement noir et aux chaleurs spécifiques pour les températures très basses.

Et c'est toujours le « flambeau des mathématiques » qui éclaire la science sociale comme la science physique. Deux siècles qui se sont écoulés depuis la publication de l'« Ars conjectandi » ont de plus en plus confirmé la thèse que son illustre auteur a énoncée en 1685 : *Omnes disciplinae Mathesi indigent; Mathesis nulla, sed per se sola sibi sufficit.*

II

M. A. *Markof* a commencé son discours en indiquant que le théorème de Jacques Bernoulli est le premier de l'ensemble des théorèmes qui peut être appelé *la loi des grands nombres.* On ne peut pas déterminer exactement l'année dans laquelle J. Bernoulli a trouvé sa démonstration. Dans ses lettres à Leibniz (3 octobre 1703 et 20 avril 1704) [1] Bernoulli écrit : « Dixi autem in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationen jam ante duodecennium Frater et approbavit. » Dans son ouvrage « Ars conjectandi » il éloigne à vingt ans l'époque à laquelle il a démontré ou commencé à démontrer son théorème : « Hoc igitur est illud problema quod evulgandum hoc loco proposui postquam jam per vicennium pressi. » Il est à remarquer que l'éditeur de l'ouvrage posthume, Nicolas Bernoulli, n'a pas apprécié à sa valeur l'importance du célèbre théorème. Au contraire, Jacques Bernoulli lui-même l'a considéré comme le fondement nécessaire pour la recherche des probabilités *a posteriori.* La démonstration de Jacques Bernoulli est tout à fait exacte, quoique liée à une condition restrictive relative aux nombres des épreuves. Comme la formule exacte qui exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre des arrivées d'un événement quelconque A au nombre total des épreuves et la probabilité de l'événement ne sort pas des limites déterminées et très pénibles à calculer si le nombre des épreuves est grand, on se sert des formules d'approximation. On rencontre le premier exemple d'une telle formule d'approximation dans la lettre de Nicolas Bernoulli à Montmort, 23 juin 1713. Elle se rattache à la question intéressante de la stabilité de la distribution des nouveau-nés par rapport à leur sexe et a attiré l'attention de Moivre qui, aidé par Stirling, a

[1] GERHARDT, *Leibnizens math. Schr.*, III, S. 77, 88.

obtenu comme l'expression approximative de la probabilité l'intégrale que nous appelons l'intégrale de Laplace (Miscellanea analytica, 1730). M. Markof n'entre pas dans l'étude détaillée des expressions approximatives; il se contente d'indiquer que le perfectionnement des méthodes du calcul approximatif a été le sujet des travaux remarquables de Laplace et de Poisson. Le calcul approximatif de la probabilité dans le cas où l'erreur peut être suffisamment évaluée conduit à des théorèmes-limites. Ainsi il donne pour le théorème de Bernoulli la démonstration de Laplace liée à la déduction du second théorème-limite pour le cas le plus simple. Tandis que dans le théorème on prend pour la différence entre le rapport du nombre des arrivées de l'événement A au nombre total des épreuves et la probabilité de l'événement A les limites fixes, dans le second théorème-limite ces limites sont proportionnelles à l'unité divisée par la racine carrée du nombre des épreuves que l'on suppose toujours croître indéfiniment. Le théorème dit que pour un nombre suffisamment grand d'épreuves la probabilité que les limites ne seront pas dépassées s'approche de l'intégrale de Laplace aussi près que l'on veut.

En combinant le second théorème-limite avec le théorème de Bernoulli on parvient à ce que l'on peut appeler le second degré du théorème de Bernoulli. Remplacez chaque épreuve séparée par un ensemble d'épreuves dont le nombre peut croître indéfiniment et considérez une série indéfinie de ces ensembles. Au lieu de l'événement primaire considérez le nouveau qui consiste en ce que les résultats d'un ensemble ne dépassent pas les limites indiquées. Alors le théorème de Bernoulli conduit à son second degré, la probabilité de l'événement primaire étant remplacée par la valeur-limite de la probabilité du nouvel événement, c'est-à-dire par l'intégrale de Laplace. Poisson a employé le calcul approximatif dans un autre but : pour la généralisation du théorème de Bernoulli. Le théorème qu'on appelle maintenant le théorème de Poisson ou la loi des grands nombres diffère du théorème de Bernoulli en ce que dans le premier la probabilité de l'événement ne reste pas constante pour toutes les épreuves mais peut changer d'épreuve à épreuve. On doit alors remplacer dans l'énoncé du théorème de Bernoulli la probabilité constante par la moyenne arithmétique des probabilités. Poisson n'a pas démontré son théorème parce qu'il s'est limité au calcul approximatif sans évaluer d'une façon suffisante l'erreur du calcul.

C'est P. L. Tchebychef qui le premier a donné en 1846 la démonstration du théorème de Poisson dans sa note remarquable « Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités », (« Journal de Crelle », vol. 53). Vingt ans après, Tchebychef a donné une autre démonstration du théorème de Poisson. Cette seconde démonstration, basée sur la considération de l'espérance mathématique d'un certain carré [1], est merveilleusement simple et donne un théorème beaucoup plus général que celui de Poisson parce qu'il s'agit dans ce théorème de la somme de plusieurs grandeurs éventuelles. Mais il faut remarquer que les points fondamentaux de la démonstration ont été indiqués en 1853 par un mathématicien français Bienaymé dans son mémoire : « Considération à l'appui de la découverte de Laplace ». (Comptes Rendus, vol. 37). Le mémoire de Bienaymé a été réimprimé dans le Journal de Liouville et placé justement devant le mémoire de Tchebychef, sans aucune indication cependant sur le lien étroit qui unit les deux mémoires. Depuis, Tchebychef, dans une courte note lue au Congrès de Lyon en 1873 et publiée dans le Journal de Liouville en 1874 [2], en indiquant ce lien, a remarqué lui-même que sa seconde démonstration est une application de la nouvelle méthode donnée par Bienaymé dans le mémoire cité. Cette méthode — méthode des moments ou des espérances mathématiques [3] — peut être caractérisée de la façon suivante :

On considère les espérances mathématiques de fonctions diverses d'une certaine quantité et on en déduit les indications relatives aux probabilités de telles ou telles suppositions. Quoique Tchebychef ait attribué lui-même cette méthode à Bienaymé, M. Markoff considère comme plus juste de la nommer méthode de Bienaymé-Tchebychef parce que cette méthode a trouvé sa pleine justification dans les travaux de Tchebychef. C'est Tchebychef qui l'a liée avec certains problèmes sur les maxima et les minima, qui diffèrent des problèmes du calcul des variations en ce que la condition de la continuité de la fonction est remplacée par la condition de l'invariabilité de son signe, vu que les masses et les probabilités ne peuvent pas être négatives. D'un autre côté c'est Tchebychef qui a montré que la méthode des espérances mathématiques mène au premier et au second théorème-limite. Le développement ultérieur de la loi des grands nombres est de notre temps ; il consiste dans une extension du domaine de l'application des théorèmes-limites, par exemple au cas des épreuves et des grandeurs liées ; ici la méthode de Tchebychef s'applique avec le même succès que la méthode de Laplace [4].

A la fin de son discours, M. Markof a rappelé que sur la tombe

---

[1] Recueil mathématique de Moscou 1866. Journal de Liouville 1867. L'article porte le nom : *Valeurs moyennes* (v. Œuvres, comp. t. 1, p. 687-694).

[2] Œuvres, t. II, p. 183.

[3] M. Markof, dans la troisième édition russe de sa *Théorie des probabilités,* a placé un grand appendice sous le titre : *Démonstration du second théorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments ;* cet appendice est publié séparément en langue française comme une édition pour le bicentenaire. Un portrait de J. Bernoulli y est ajouté.

[4] Les travaux importants de M. Markof sur ce sujet sont publiés dans l'appendice cité à la troisième édition russe et dans les appendices II et III à la traduction allemande faite par M. Liebmann : *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Leipzig, Teubner, 1912.

de Jacques Bernoulli sont gravés, selon son désir, les paroles « Eadem mutata resurgo ». L'espérance exprimée par ces paroles s'est réalisée : Bernoulli vit et vivra éternellement dans son théorème.

III

Le discours de M. *Tchouprof*, a eu pour but d'opposer deux méthodes de connaissance : la connaissance astronomique, comme dit E. Dubois-Reymond dans son célèbre discours, et la connaissance statistique. Tandis que la première tend à connaître l'histoire d'une individualité (planète, homme, molécule), l'autre ne s'intéresse pas à l'individuel, mais étudie les collectivités, les valeurs moyennes. La connaissance astronomique est impuissante dans beaucoup des problèmes où le point de vue statistique, fondé sur la loi des grands nombres, nous donne au contraire des résultats remarquables (les questions de l'hérédité liées à la loi de Mendel, les problèmes de la météorologie, l'étude de la structure des systèmes stellaires, etc.). Les progrès merveilleux de l'atomisme dans ces dernières années ont vaincu la prévention des physiciens contre la méthode statistique. Les lois de la nature, lesquelles d'après le point de vue astronomique ne donnaient pas lieu à des exceptions, se réduisent maintenant à des constellations les plus probables des événements ; la violation de ces lois est au plus haut degré improbable, quoique possible. Auparavant les lois de la nature étaient la source du déterminisme et on cherchait l'indéterminisme dans ce qui est individuel ; maintenant au contraire, c'est l'individuel qui est considéré comme déterminé et les lois de la nature qui ne représentent que les moyennes statistiques portent en elles-mêmes une certaine indétermination.

A. Vassilief (Saint-Pétersbourg).