

IV. — Formes doublement quadratiques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

soit, après quelques réductions

$$E_i = ae_i^2 + be_i - \frac{g_3}{6}a . \quad (47)$$

Quant au covariant $T = \frac{1}{2}(HX' - XH')$, c'est évidemment un *combinant* du faisceau (X, H) ; si on substitue $aH + bX$ à X , il se reproduit multiplié par le facteur

$$-\frac{1}{4}(4b^3 - g_2ba^2 - g_3a^3) .$$

IV. — Formes doublement quadratiques.

10. — On nomme *forme doublement quadratique* un polynôme tel que

$$F = \sum a_{mn}x^m y^n ; \quad (m, n = 0, 1, 2) \quad (48)$$

soit, en le développant suivant les puissances de l'une ou de l'autre des variables,

$$F = X_2y^2 + 2X_1y + X_0 = Y_2x^2 + 2Y_1x + Y_0 . \quad (49)$$

Les coefficients X_i et Y_i , dans ces représentations, valent

$$X_i = a_{2i}x^2 + 2a_{1i}x + a_{0i} , \quad Y_i = a_{i2}y^2 + 2a_{i1}y + a_{i0} . \quad (50)$$

Relativement à ces formes F doublement quadratiques, nous avons à résoudre plusieurs questions importantes qui se rattachent toutes, plus ou moins directement, au problème de l'équivalence de deux pareilles formes par transformation linéaire unimodulaire. Un rôle fondamental, dans toute la théorie, est dévolu aux discriminants de F relatifs à chaque variable; ce sont les fonctions

$$D_y(x) = X_1^2 - X_0X_2 , \quad \text{et} \quad D_x(y) = Y_1^2 - Y_0Y_2 , \quad (51)$$

que nous représentons le plus souvent par les lettres X et Y .

Commençons par exclure le cas où X et Y possèdent des racines multiples; à ce sujet on doit remarquer que les racines multiples apparaissent ensemble dans les deux polynômes, ou que si X possède une racine multiple, Y en possède une autre.

En effet, il est évident que X et Y sont des covariants de la forme. Si on opère dans F une transformation portant sur les deux variables et telle que

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'} , \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha y' + \beta}{\alpha' y' + \beta'} , \quad (52)$$

le nouveau polynôme F' obtenu après avoir chassé les diviseurs est encore doublement quadratique en x' et y' ; sauf des facteurs constants, ses deux discriminants sont les transformés

$$X' = (a'x' + b')^2 X(x), \quad Y' = (\alpha'y' + \beta')^2 Y(y),$$

de X et Y par (52).

Au moyen d'une transformation semblable amenons une racine de l'équation $X = 0$ à l'origine $x = 0$. En vertu de la condition $F = 0$, à cette racine $x = 0$, simple ou multiple, correspond une racine y de F , celle-là est une racine double. Amenons de nouveau y à l'origine des y par une transformation linéaire. Supposons maintenant que la première racine $x = 0$ soit multiple pour l'équation $X = 0$; on trouve immédiatement pour satisfaire ces diverses conditions les deux hypothèses que voici. Ou bien, on a $a_{00} = a_{01} = a_{10} = 0$, ou bien $a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$. Si c'est le premier système qui est vérifié, $y = 0$ est une racine double de $Y = 0$, si c'est le second $Y_0 = 0$, $Y = Y_1^2$ est un carré parfait; ce deuxième cas n'existe par conséquent que si l'équation $F = 0$ est décomposable en deux équations linéaires en y .

De toute manière il est établi que X ne peut admettre de racines multiples sans que Y en admette de son côté. Il importe de fixer par une interprétation géométrique la signification du résultat précédent.

La courbe $F = 0$ est une biquadratique C_4 rencontrée en deux points seulement par les parallèles aux axes coordonnés. Elle possède donc deux points doubles à l'infini, un sur chaque axe; elle est ainsi de 2^{me} classe et de genre 1. Ce sera même, parmi les courbes du 4^{me} degré, la plus générale possédant deux points doubles si, par une perspective, on a pris soin de les transporter tous deux à l'infini.

Il est aisé de voir que la condition pour que C_4 possède un troisième point double est précisément que X admette une racine double. On aperçoit immédiatement ainsi, à cause de la symétrie des axes, l'équivalence de la dite condition pour X et Y ; c'est donc simultanément que X et Y ont des racines multiples, et dans ce cas, le genre de C_4 s'abaisse de 1 à 0.

Si, dans $F = 0$, le coefficient a_{22} est nul, la courbe n'est plus que du troisième degré. Cette cubique C_3 contient les points situés à l'infini sur les deux axes, et ce sont des points ordinaires; la courbe, d'un genre égal à l'unité, ne deviendra unicursale que si X , et par suite Y , admet une racine double.

Laissons désormais de côté les cas de dégénérescence, nos discriminants X et Y n'auront aucun facteur multiple, et leur degré ne peut s'abaisser au-dessous du troisième.

11. — *Forme normale. Equivalence des deux discriminants.* — Désignons par l_1, l_2, l_3 les polynômes conjugués relatifs à X, par m_1, m_2, m_3 ceux relatifs à Y. Nous savons que les l_i sont linéairement indépendants; c'est dire que les quantités $x^2, x, 1$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire homogène des polynômes l_i ; exactement de même on peut remplacer $y^2, y, 1$ par certaines combinaisons homogènes des m_i .

Cela étant, le polynôme F peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme doublement linéaire

$$(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) l_1 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3) l_2 + (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3) l_3, \quad (53)$$

Or je dis que cette réduite à neuf termes se ramène en réalité à un simple trinôme, et que, en numérotant autrement, si besoin est, les trois polynômes m_1, m_2, m_3 dont l'ordre importe peu, elle s'écrira

$$a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 .$$

Pour établir ce fait supposons, pour plus de simplicité, que les l_i, m_i ont été réduits à leur forme normale avec des discriminants égaux à l'unité, et considérons une forme linéaire telle que

$$f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 ;$$

son discriminant est, par définition, égal à

$$\frac{1}{4} [(\sum f_i l_i')^2 - 2 \sum f_i l_i \sum f_i l_i''] .$$

A cause des conditions d'orthogonalité entre les l_i , il se réduit à

$$f_1^2 l_1'^2 + f_2^2 l_2'^2 + f_3^2 l_3'^2 .$$

Appliquons cette règle pour trouver les deux discriminants de la forme bilinéaire ci-dessus (53), où l'on suppose, répétons-le, les l_i et m_i réduits à leur forme normale. On trouve à l'instant

$$\begin{aligned} X &= (a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3)^2 + (a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3)^2 + (a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3)^2 . \\ Y &= (a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)^2 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3)^2 + \\ &\quad (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3)^2 . \end{aligned}$$

Or, par supposition, les l_i sont les polynômes conjugués relatifs à X comme les m_i le sont à Y; il faut donc que les seconds membres des formules précédentes se réduisent tous les deux à la

forme purement quadratique, par destruction des doubles produits, de manière que

$$X = A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2, \quad \text{et} \quad Y = B_1 m_1^2 + B_2 m_2^2 + B_3 m_3^2. \quad (54)$$

Mais d'après un lemme d'Algèbre élémentaire, les conditions moyennant lesquelles les deux sommes de carrés

$$\begin{aligned} \Phi &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2, \\ \Phi' &= (a_1 x + a_2 y + a_3 z)^2 + (b_1 x + b_2 y + b_3 z)^2 + (c_1 x + c_2 y + c_3 z)^2, \end{aligned}$$

deviennent purement quadratiques des types

$$\Phi = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2, \quad \text{et} \quad \Phi' = B_1 x^2 + B_2 y^2 + B_3 z^2,$$

sont des plus limitées. On démontre, en effet, aisément la proposition suivante.

Si Φ et Φ' sont tous deux purement quadratiques et que, en outre, les constantes A_1, A_2, A_3 soient différentes les unes des autres, les trois polynômes

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

se réduisent nécessairement à des monômes qui, de plus, sont linéairement indépendants.

Pour ne pas allonger, je laisse au lecteur le soin d'obtenir la démonstration, facile, de ces divers points; je me borne à en faire l'application aux polynômes X, Y auxquels je reviens.

Remarquons que les discriminants des six polynômes l_i, m_i ont été supposés égaux à l'unité, et les polynômes eux-mêmes réduits à leur forme normale. On a donc

$$\sum l_i^2 = \sum m_i^2 = 0;$$

si donc, dans la formule (54), pour X , deux coefficients étaient égaux, par exemple $A_1 = A_2$, en remplaçant $l_1^2 + l_2^2$ par la quantité égale $-l_3^2$, ce discriminant serait un carré parfait, cas exclu.

Il faut donc que les formes réduites (54) possèdent trois coefficients distincts; dès lors, en vertu du lemme ci-dessus, les trois trinômes

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3, \quad b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3, \quad c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3,$$

dégénèrent en trois monômes indépendants. Il suffit de changer au besoin la numérotation des m_i pour leur donner la forme

$$a_1 m_1, \quad a_2 m_2, \quad a_3 m_3.$$

Du même coup l'expression doublement quadratique F apparaît sous sa *forme réduite*, soit

$$F = a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 . \quad (55)$$

Quant aux discriminants, leur valeur correspondante sera

$$X = a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l_2^2 + a_3^2 l_3^2 , \quad (56)$$

$$Y = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 . \quad (57)$$

Or, nous savons que des transformations unimodulaires permettent de passer du système l_i^2 au système m_i^2 . Les deux théorèmes fondamentaux suivants s'offrent à présent d'eux-mêmes.

a) *Les deux discriminants X , Y de la forme F sont transformables l'un dans l'autre; ils sont équivalents et possèdent les mêmes invariants rationnels g_i , ou irrationnels e_i .*

b) *A l'aide d'une transformation linéaire opérée sur y seul F devient symétrique en x et en y .*

Arrêtons-nous un instant sur les interprétations géométriques de ces résultats, elles sont classiques et fort simples.

1° Soit d'abord le cas où la courbe $F = 0$ est une cubique; pour qu'une cubique C_3 se présente sous la forme $F = 0$, il suffit de transporter à l'infini une corde AB de la cubique, puis O désignant un point quelconque de son plan, de prendre OA , OB pour axes coordonnés.

Cela étant, l'équation $X = 0$ détermine les abscisses des tangentes menées par le point B , autres que celles qui touchent la courbe en B ; il y a quatre tangentes pareilles puisque C_3 est de la sixième classe.

L'équation $Y = 0$ déterminera de même les tangentes menées à C_3 par le point A . Le théorème d'équivalence entre X et Y nous donne donc la propriété fondamentale de la géométrie des cubiques.

Qu'on mène par un point A d'une cubique les quatre tangentes à la courbe telles que leur contact n'ait pas lieu en A , le rapport anharmonique de ces tangentes est constant quand A varie.

2° Supposons, en second lieu, que la courbe $F = 0$ soit une bi-quadratique C_4 non dégénérée. Les points A et B sur la droite de l'infini sont les points doubles de C_4 ; la même interprétation nous apprend que

¹ Il est clair que cette même forme réduite peut être adoptée, même si l_i , m_i ne sont pas réduits à leur forme normale. Les formules qui suivent pour X et Y supposent simplement, par exemple, que les l_i , m_i ont l'unité pour discriminant.

Si, par les points doubles d'une C_4 de genre 1, on mène quatre tangentes autres que les tangentes aux points doubles eux-mêmes, ces deux faisceaux de quatre tangentes sont projectifs.

3° Généralisons ceci en considérant une biquadratique gauche C_4 . Soient A, B, C trois points de la courbe, choisissons ABC comme plan de l'infini, OA, OB, OC comme axes coordonnés. D'après ces conventions, les équations de C_4 seront

$$\begin{aligned} \alpha yz + bz x + cxy + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0, \\ \alpha' yz + b' z x + c' xy + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons z , nous trouvons pour définir la projection de la courbe sur le plan OX, OY, une équation doublement quadratique $F = 0$. Donc, toujours par la même interprétation, si par la corde \overline{BC} on mène quatre plans tangents à C_4 , ils ont le même rapport anharmonique que quatre autres plans semblables conduits suivant CA; ou bien

Le rapport anharmonique des quatre plans tangents menés à la biquadratique gauche par une corde quelconque est constant.

4° Il existe encore d'autres interprétations géométriques du théorème d'équivalence; la plus connue, en dehors des précédentes, est celle fournie par le système de deux coniques. Elle résulte aisément du rapport qui existe entre un semblable système et l'équation doublement quadratique. Halphen a développé ces relations, avec un grand détail, dans les chapitres 10 et 11 de son second volume; je me borne à citer ici la proposition qui traduit, pour deux coniques, le théorème d'équivalence entre les deux discriminants X et Y.

Deux coniques étant tracées à volonté dans un plan, le rapport anharmonique des points d'intersection, pris sur l'une des coniques, est égal au rapport anharmonique des tangentes communes pris sur l'autre¹.

12. — *Formes symétriques. Conditions d'équivalence.* — Le problème à résoudre consiste à trouver les conditions à satisfaire pour qu'une forme F soit équivalente à une autre F' ; la première forme doit se changer dans la seconde quand on exécute sur elle les deux transformations linéaires unimodulaires

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'}, \quad y = \frac{cy' + d}{c'y' + d'}. \quad (58)$$

Une condition d'équivalence se rencontre immédiatement; il est clair en effet que si F se transforme en F' , les deux discriminants

¹ HALPHEN. *Fonctions elliptiques*, 2^me vol. p. 174.

doivent être équivalents deux à deux, X à X' et Y à Y'. En écrivant les conditions de cette double équivalence entre les discriminants, on se procure toutes les transformations possibles de F en F', selon le mode susindiqué (58).

La condition précédente, qui est nécessaire pour l'équivalence et fournit toutes les équations de la transformation, n'est pas suffisante. Prenons en effet une forme F et essayons de la reconstruire à partir de ses discriminants X et Y.

Soient e_i les invariants irrationnels communs à X et à Y, l_i les polynômes conjugués de X, m_i ceux de Y; ces polynômes sont de nouveau déterminés par les formules (25), et leur discriminant, identique pour l_i et m_i , vaut comme nous savons, $4(e_i - e_j)(e_i - e_k)$.

On a entre les l_i l'identité

$$\sum (e_j - e_k) l_i^2 = 0, \quad (59)$$

tandis que X est donné par l'expression

$$X = \sum \frac{e_i (e_j - e_k) l_i^2}{\sqrt{\Delta}}. \quad (60)$$

Soit donc

$$F = \sum a_i l_i m_i, \quad (61)$$

la représentation bilinéaire de F; son discriminant relatif à y trouvé suivant les règles du § précédent, sera

$$D_y(x) = \sum 4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) l_i^2. \quad (62)$$

Il faut que D_y coïncide avec X; en comparant (59) (60) et (62), on voit que la condition nécessaire et suffisante de cette égalité est

$$4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) = \frac{(e_i - \rho)(e_j - e_k)}{\sqrt{\Delta}},$$

la quantité ρ désignant une indéterminée.

On en tire

$$a_i^2 = \frac{(\rho - e_i)(e_j - e_k)^2}{\Delta}, \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{(e_j - e_k)\sqrt{\rho - e_i}}{\sqrt{\Delta}}; \quad (63)$$

tels sont les coefficients à porter dans (61). On voit, par ce calcul, que si X et Y sont donnés, F peut prendre une infinité de formes différentes qui se distinguent les unes des autres par la valeur du paramètre ρ .

Si donc une autre forme F' a des discriminants X', Y' respectivement équivalents à X et Y , elle donne lieu aux équations

$$F' = \sum a'_i l'_i m'_i, \quad \text{avec} \quad a'_i = \frac{(e_j - e_k) \sqrt{\varrho' - e_i}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Or toute transformation qui changerait F en F' changera aussi X en X' , Y en Y' , c'est-à-dire l_i en l'_i et m_i en m'_i ; ainsi donc l'équivalence entre F et F' ne saurait avoir lieu à moins que $\varrho' = \varrho$.

Voici donc un nouvel invariant absolu qui vient s'adjoindre aux deux autres g_2, g_3 , pour que F se change en F' , en même temps que X en X' et Y en Y' ; il y a, sans plus, trois invariants g_2, g_3, ϱ dont l'égalité est nécessaire, mais aussi suffisante, pour la possibilité de la transformation.

Les expressions a_i ci-dessus dépendent de trois irrationnelles $\sqrt{\varrho - e_i}$, il est aisé de les remplacer par une seule irrationnelle. Soit en effet Z un nouveau polynôme biquadratique en z , possédant les mêmes invariants e_i que X et Y ; nommons-en K le Hessien et n_i les polynômes conjugués.

Posons $\varrho = -\frac{K}{Z}$; alors, d'après la formule (37')

$$\sqrt{\varrho - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}};$$

en substituant ces trois valeurs dans l'équation (61), on voit que tout polynôme F aux discriminants $D_y = X$ et $D_x = Y$ se présente sous la forme canonique trilinéaire

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\Delta Z}} \sum (e_j - e_k) l_i m_i n_i.$$

Répétons que, dans cette forme, le polynôme Z qui contient l'arbitraire z est lui-même quelconque, pourvu qu'il ait les invariants e_i en commun avec X et Y .

Le théorème précédent, facile à vérifier par le calcul direct, peut encore s'énoncer comme suit:

Soient trois polynômes en x, y , et z du 4^{me} degré X, Y, Z ; supposons-les équivalents ou doués des mêmes invariants e_i . Soient encore l_i, m_i, n_i leurs polynômes conjugués; alors la forme triplement quadratique

$$G = \sum (e_j - e_k) l_i m_i n_i. \quad (64)$$

admet, par rapport aux trois variables, des discriminants D_x, D_y, D_z qui sont

$$D_x = 4\Delta YZ, \quad D_y = 4\Delta ZX, \quad D_z = 4\Delta XY. \quad (65)$$

Toutes les propositions qui précèdent concernent des polynômes F quelconques : nous voulons en faire l'application au cas le plus important qui est celui d'une forme F , non seulement quadratique en x et en y , mais encore symétrique par rapport à ces lettres. Il va de soi que, dans ce cas, X et Y d'une part et les l_i, m_i de l'autre, ne diffèrent que par le nom de la variable, x chez les uns, y chez les autres.

Parmi les diverses formes Z possédant les mêmes invariants que X , la plus simple, qui s'offre d'abord, est la forme transformée de X par changement de x en z , de sorte que de même que $Y = X y$ on ait aussi $Z = X z$. Ce choix particulier présente un intérêt spécial dans l'étude du théorème d'addition des fonctions elliptiques. Toutefois nous ne l'adopterons pas ici, et nous ferons

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 ;$$

les valeurs qui s'en déduisent pour les polynômes conjugués n_i sont donc celles consignées sous le n° 45.

Cherchons, pour le cas actuel, la constitution du polynôme G 64, en fonction explicite des variables x, y, z , et des coefficients du polynôme X que j'appellerai aussi f_{xx} . Nous avons

$$X = f_{xx} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 .$$

Développons G suivant les puissances de z et remplaçons les n_i par leurs valeurs 45, il vient

$$G = \sum e_j - e_k l_i m_i n_i = P^0 z^2 + 2P^1 z + P^2 .$$

$$P^0 = 2 [e_2 - e_3 (l_1 m_1 + e_2 - e_1) l_2 m_2 + e_1 - e_2 (l_2 m_2 + e_2 - e_1) l_3 m_3] .$$

$$P^1 = -2 [e_1 e_2 - e_2 (l_1 m_1 + e_2 - e_1) l_2 m_2 - e_2 e_1 - e_2 (l_2 m_2 + e_2 - e_1) l_3 m_3] .$$

$$P^2 = -2 [(e_1^2 + e_2 e_3) e_2 - e_2 (l_1 m_1 + e_2 - e_1) l_2 m_2 + \dots] .$$

et il ne reste plus qu'à exprimer ces trois quantités en fonction des variables x, y et des coefficients de X .

Remarquons pour cela que si deux polynômes doublement quadratiques, et en outre symétriques, L_{xy}, M_{xy} — comme le sont les quantités P^i — deviennent égaux quand $x = y$, ce qui constitue le cas de coïncidence, ces polynômes ne diffèrent l'un de l'autre que par un terme du type $a x - y^2$.

En effet le quotient $\frac{L_{xy} - M_{xy}}{x - y}$ doit être bilinéaire, entier, et en outre gauche relativement à la permutation des deux variables. En écrivant ce quotient sous la forme $axy + bx + cy + d$, il faut donc que

$$a = 0, \quad d = 0, \quad b + c = 0 .$$

et l'on a bien $L_{xy} - M_{xy} = a(x - y)^2$. De cette remarque il résulte qu'une fonction telle que L_{xy} est complètement définie quand on connaît les deux valeurs L_{xx} et $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right)_{x=y}$; c'est cette observation que nous allons employer trois fois de suite pour déterminer les quantités $P^{(i)}$.

A l'égard de la première, on remarquera que dans le cas de coïncidence $x = y$, on a $l_i = m_i$; alors, en vertu de l'équation (27), P^0 s'annule. On a donc $P^0 = A(x - y)^2$; mais, comme d'autre part,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x \partial y} \right)_{x=y} = \sum (e_j - e_k) l_i'^2 = -A,$$

et que la somme nous est connue d'après (22), on tire

$$A = 4\sqrt{\Delta}, \quad \text{et} \quad P^0 = 4\sqrt{\Delta}(x - y)^2.$$

Appliquons le même raisonnement à $P^{(1)}$; d'après l'équation (28), on a dans le cas de coïncidence

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta}X = -2\sqrt{\Delta}f_{xx}.$$

Or, en invoquant le résultat (32'),

$$\left(\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x \partial y} \right)_{x=y} = -2 \sum e_i (e_j - e_k) l_i'^2 = -\frac{2}{3} X'' \sqrt{\Delta};$$

dédoublons donc la forme f_{xx} biquadratique en une forme doublement quadratique et symétrique; on trouve immédiatement, d'après ce qui précède, l'équation

$$f_{xy} = a_0 x^2 y^2 + 2a_1 xy(x + y) + a_2(x^2 + 4xy + y^2) + 2a_3(x + y) + a_4, \quad (66)$$

et

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta}f_{xy}.$$

Soit enfin $P^{(2)} = -2(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3)l_1 m_1 + \dots$; nous avons

$$3e_1^2 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) + \frac{1}{4}g_2, \quad \text{et} \quad 3e_2 e_3 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) - \frac{1}{2}g_2;$$

donc

$$3(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{1}{4}g_2(e_2 - e_3).$$

Cette identité, et ses analogues obtenues par permutation, amènent P_{xy}^2 à la forme

$$P_{xy}^2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{3} \sum l_i m_i + \frac{g_2}{3} \sqrt{\Delta} (x - y)^2 .$$

Désignons maintenant par H_{xx} le Hessien de f_{xx} , et prenons de nouveau le cas de coïncidence. En vertu des formules (36'), nous avons

$$P_{xx}^2 = -4\sqrt{\Delta} H_{xx} , \quad \left(\frac{\partial^2 P_{xy}^2}{\partial x \partial y} \right)_{x=y} = \frac{\sqrt{\Delta}}{3} \sum l_i'^2 - \frac{2}{3} g_2 \sqrt{\Delta} .$$

Appliquons au Hessien la relation générale (32), nous avons

$$\sum l_i'^2 = -4H_{xx}'' - \frac{16}{3} [(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) + \dots] = -4H_{xx}'' + 4g_2 .$$

Voici donc les conditions à employer pour déterminer P_{xy}^2 ,

$$P_{xx}^2 = -4\sqrt{\Delta} H_{xx} , \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 P^2}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{4}{3} \sqrt{\Delta} H_{xx}'' ;$$

elles donnent, après un court calcul, par dédoublement du Hessien H_{xx}

$$P_{xy}^2 = -4\sqrt{\Delta} H_{xy} ,$$

formule dans laquelle H_{xy} a la signification suivante

$$\begin{aligned} 4H_{xy} = & 4(a_0 a_2 - a_1^2) x^2 y^2 + 4(a_0 a_3 - a_1 a_2) xy(x + y) + (a_0 a_4 - a_2^2) (x + y)^2 \\ & + 8(a_1 a_3 - a_2^2) xy + 4(a_1 a_4 - a_2 a_3) (x + y) + 4(a_2 a_4 - a_3^2) . \end{aligned} \quad (67)$$

Résumons. Si une équation doublement quadratique et symétrique en x, y admet pour discriminant la forme

$$X = f_{xx} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + \dots ,$$

elle a pour expression

$$H_{xy} + z f_{xy} - z^2 (x - y)^2 = 0 , \quad (68)$$

où les symboles f_{xy} et H_{xy} ont les valeurs (66) et (67), tandis que z désigne une arbitraire.

De plus, le discriminant relatif à z de cette formule (68) est égal

au produit $f_{xx} f_{yy}$, ainsi que nous savons. On peut donc écrire (68) sous la forme résolue

$$z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2}. \quad (69)$$

Enfin une dernière forme de la même relation est digne de remarque, comme s'étant présentée à Euler¹ et Lagrange² dans leurs recherches sur le théorème d'addition des intégrales elliptiques. La voici.

Dans le carré $\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2$, remplaçons le double produit $-2\sqrt{f_{xx} f_{yy}}$ par sa valeur tirée de (69), il vient

$$\frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2} + 4z.$$

Or, si l'on fait

$$Q_{xy} = \frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2},$$

et qu'on remarque les identités

$$\left(\frac{\partial f_{xy}}{\partial x}\right)_{x=y} = \frac{1}{2}f'_{xx}, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 f_{xy}}{\partial x^2}\right)_{x=y} = \frac{1}{6}f''_{xx},$$

on voit que la valeur de coïncidence est

$$Q_{xx} = \frac{f''_{xx} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{2} = \frac{1}{3}f''_{xx} = 4a_0x^2 + 8a_1x + 4a_2.$$

D'ailleurs Q_{xy} est entier, symétrique et du second degré en x et y ; le terme du second degré est évidemment

$$a_0 \frac{x^4 + y^4 - 2x^2y^2}{(x-y)^2} = a_0(x+y)^2.$$

La valeur de Q_{xy} se dégage de suite de ce double renseignement, elle est

$$Q_{xy} = a_0(x+y)^2 + 4a_1(x+y) + 4a_2.$$

La nouvelle forme cherchée pour l'équation (68) se déduit de là, la voici :

$$\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2 = a_0(x+y)^2 + 4a_1(x+y) + 4(a_2 + z). \quad (70)$$

¹ EULER. *Institutiones Cal. Integr.*, vol. 1, Sectio secunda c. VI.

² LAGRANGE. *Oeuvres*, éd. Serret, II, p. 533.

13. — *Détermination des invariants.* — Continuons à nous limiter aux équations doublement quadratiques symétriques. Ces équations possèdent comme nous savons, trois invariants qui sont g_2, g_3 , et z ; la détermination des invariants est extrêmement simple. Car, en premier lieu, g_2 et g_3 sont les invariants rationnels de la fonction $D_y = f_{xx}$; F_{xy} étant donné ils se trouvent ainsi d'une manière immédiate.

En second lieu, on a identiquement, comme nous savons,

$$F_{xy} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xy} + zf_{xy} - z^2(x-y)^2]; \quad (71)$$

à leur tour les expressions f_{xy} et H_{xy} sont toutes connues quand f_{xx} , ou F_{xy} , sont donnés; il suffit donc d'identifier les deux membres de (71) pour avoir le dernier invariant cherché z . On peut même, avant de procéder à cette identification, faire $x = y$, ce qui ramène l'équation précédente à la forme plus simple

$$F_{xx} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xx} + zf_{xx}]; \quad (72)$$

sous l'une ou l'autre de ces diverses formes, on voit que le problème de la détermination de z n'offre aucune difficulté.

Halphen a donné, pour trouver les trois invariants, une règle sur laquelle il nous faut revenir¹; il propose de former une *équation caractéristique* dont les racines seraient proportionnelles aux trois quantités $z - e_i$. Mais la page 366 où est formée cette équation contient, à côté de quelques obscurités, une erreur qui compromet singulièrement le résultat énoncé.

Je suppose qu'on ait sous les yeux le passage en question; on y verra que l'illustre auteur propose de considérer la forme

$$sF_{xy} + (x-y)^2$$

comme une fonction des deux variables

$$xy = \xi, \quad x + y = \eta.$$

Le discriminant de la forme quadratique en $\xi\eta$ ainsi formée serait précisément l'équation caractéristique. Quelques essais suffisent à montrer l'inexactitude de la règle; la raison en est facile à découvrir.

¹ HALPHEN. *Fonctions elliptiques*, 2^{me} vol. p. 344, 364-366.

Prenons généralement la forme

$$F_{xy} = aH_{xy} + bf_{xy} + c(x - y)^2, \quad (73)$$

à trois coefficients arbitraires ; cherchons à en former le discriminant D_y relatif à y .

Nous savons que D_y est du type $AH_{xx} + Bf_{xx}$ et que les constantes A et B sont quadratiques en a, b, c . De plus, si $a = b = 0$, F_{xy} est un carré et D_y doit s'annuler ; c'est donc que A et B sont linéaires en c .

Considérons en second lieu le cas $a = 0$, et soit

$$f_{xy} = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0.$$

Le discriminant de f_{xy} est

$$X_1^2 - X_0 X_2 = -H_{xx} ;$$

celui de

$$F_{xy} = bf_{xy} + c(x - y)^2,$$

est égal à

$$(bX_1 - cx)^2 - (bX_2 + c)(bX_0 + cx^2) = -b^2 H_{xx} - bcf_{xx}.$$

Enfin, et en dernier lieu, si dans (73) on fait $a = 1, b = z, c = -z^2$, le polynôme F_{xy} se confond avec le premier membre de (68), le discriminant est alors égal au produit

$$\frac{1}{4}(4z^3 - g_2 z - g_3) f_{xx}.$$

Il suffit de rapprocher ces trois cas particuliers pour obtenir le discriminant D_y de la formule générale (73), sous la forme

$$D_y = -(b^2 + ac)H_{xx} - \left(\frac{g_3}{4}a^2 + \frac{g_2}{4}ab + bc\right)f_{xx} ; \quad (74)$$

on y lit, une fois de plus, ce fait fondamental qu'il existe une simple infinité de polynômes symétriques F_{xy} possédant un déterminant donné.

Voici maintenant la conséquence à tirer de (74). Parmi les formes F_{xy} , à quel caractère reconnaître celle qui sont décomposables en facteurs linéaires en x et en y ? La réponse est immédiate : il faut et suffit que le discriminant D_y soit un carré parfait. Or, nous con-

naissions les seuls carrés contenus dans la relation (74); ils dépendent de la condition

$$e_i = \frac{4bc + g_2 ab + g_3 a^2}{4(b^2 + ac)},$$

qui peut s'écrire également

$$(b - ae_i) \left(c - e_i b - e_i^2 a + \frac{g_2}{4} a \right) = 0. \quad (75)$$

Cette condition est donc réalisée si $b = ae_i$, quelle que soit la valeur de c ; ainsi

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2$$

est toujours décomposable en facteurs linéaires. C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier à l'instant; car $H_{xx} + e_i f_{xx}$ se réduisant au carré

$$- \frac{1}{4} l_i^2 = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2,$$

on obtient le polynôme décomposable

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2 = (\alpha x \gamma + \beta(x + y) + \gamma)^2 + \delta(x - y)^2. \quad (76)$$

Mais, c'est ici le point délicat, *les facteurs de la décomposition ne sont pas symétriques en x et en y, ils ne sauraient donc s'exprimer en ξ et en η .*

Soit D le discriminant de F_{xy} par rapport aux variables ξ, η ; si D s'annule, F_{xy} est décomposable en facteurs linéaires en ξ, η ; ou, si on préfère, F_{xy} se partage alors en facteurs bilinéaires relativement à x, y et *symétriques*. Aussi le discriminant de la forme (76) n'est pas nul, quoique cette forme soit décomposable, parce qu'elle l'est de manière non symétrique.

Il est d'ailleurs facile de trouver le discriminant D de la forme générale par rapport aux variables ξ, η . La fonction D est du troisième degré en a, b, c ; la condition $D = 0$ entraîne la relation (75), et comme elle n'est pas vérifiée si $b = ae_i$, elle le sera forcément en annulant le second facteur de la dite relation. On conclut de là

$$D = 4\Pi(ae_i^2 + be_i + c - \frac{g_2}{4}a); \quad i = 1, 2, 3 \quad (77)$$

le coefficient numérique de cette formule se vérifie sur un essai particulier, par exemple en faisant $a = c = 0, b = 1, F_{xy} = f_{xy}$.