

## II. — Points d'inflexion et tangentes de rebroussement.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

cercle est une des coniques ; il est conjugué avec sa tangente en  $S_2$ .

Le lieu des points  $P$  est la droite qui passe par les points de coupe des tangentes de la cubique en  $S_2$  avec le cercle.

Si  $S_1$  et  $\pi$  sont les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> points de coupe de la 1<sup>re</sup> conique auxiliaire avec la cubique, on peut permuter ces points ; le point  $P$  sera alors le point de coupe de la même conique avec la droite  $\overline{S_1 S_2}$ . (Voir *fig. 3.*)

25. La recherche des asymptotes est liée à celle des rayons doubles dans un nouveau faisceau parallèle aux deux premiers. Les asymptotes sont les tangentes par les points de coupe à l' $\infty$  des rayons conjugués parallèles.

ment un faisceau homographique avec la division de points sur  $\overline{mm_2}$ . Le cercle est une de ces coniques ; le point homologue est  $m_2$ , son point de tangence avec  $P_2$ .

L'enveloppe des droites auxiliaires  $p$  est le point de coupe des tangentes du cercle par les points de tangence de la courbe principale avec  $P_2$ .

En permutant les 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> tangentes  $mm_1$  et  $P_2$ , la droite  $p$  sera la jonction du point fixe avec le point de coupe de  $P_1$  et  $P_2$ . (Voir *fig. 4.*)

26. La recherche des tangentes parallèles à une direction donnée est dualistique de celle des asymptotes dans les courbes du 3<sup>e</sup> degré.

## II. — Points d'inflexion et tangentes de rebroussement.

PREMIER CAS : *Les courbes sont du 3<sup>e</sup> degré et de la 3<sup>e</sup> classe.*

1. *Méthode des rayons conjugués.*  
(Voir *fig. 1.*)

Les sommets des faisceaux de la correspondance du  $(2 + 1)^e$  degré sont  $S_1$  et  $S_2$ . La courbe engendrée est  $C^3$ . Comme le point  $S_2$  doit être un point de rebroussement, la conique auxiliaire doit passer par  $S_2$  et sa tangente en ce point est la tangente de rebroussement de  $C^3$ .

La conique auxiliaire est déterminée par les ponctuelles homographiques sur les rayons conjugués  $a$  et  $a_1$  passant par  $A$  sur  $C^3$ . La conique s'appelle

2. *Méthode des points conjugués.*  
(Voir *fig. 2.*)

Les ponctuelles de la correspondance de  $(2 + 1)^e$  classe sont  $P_1$  et  $P_2$ . La courbe engendrée est  $K^3$ . La base  $P_2$  devant être une tangente d'inflexion, ses deux points de tangence  $E_1$  et  $E_2$  seront confondus en un seul et la conique auxiliaire  $C_1^2$  sera tangente de  $P_2$  en ce point.

Ce point est le point d'inflexion.

La conique  $C_1^2$  est déterminée par les faisceaux homographiques issus des points conjugués

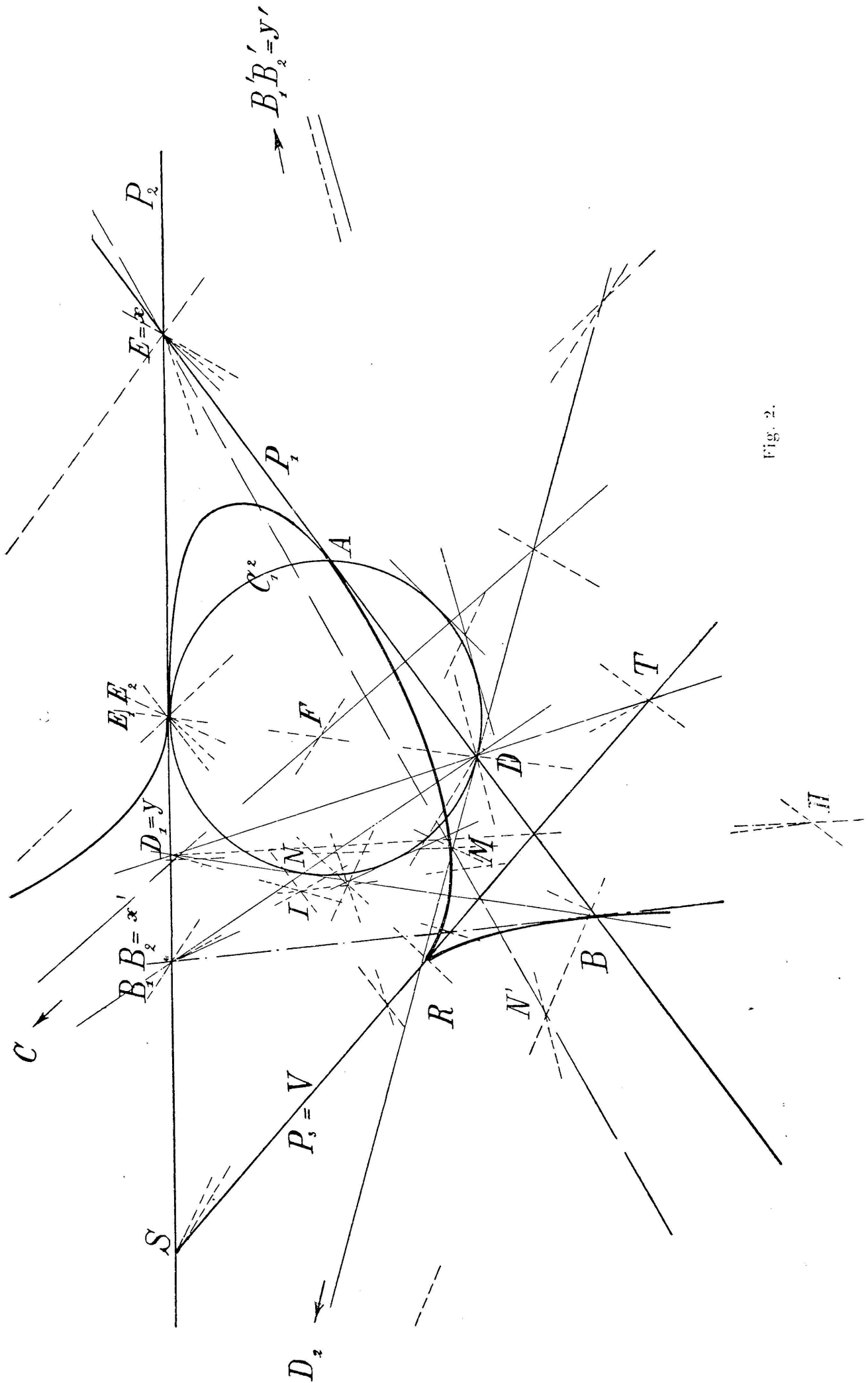


Fig. 2.

$K_1^2$ ;  $\overline{S_1A} = a$  est une tangente de  $K_1^2$  en C et C est le point de coupe des rayons conjugués  $a$  et  $a_2$ .

Par  $S_1$ , nous avons une tangente de  $C^3$  en  $S_1$  et une autre tangente de  $C^3$  en B. La première est également une tangente de  $K_1^2$  par  $S_1$ . La seconde est une droite  $\overline{S_1H}$  passant par le point de coupe H de  $a_1$  avec  $K_1^2$ .

Dans le cas considéré, nous aurons toujours un point H, mais un seul, donc la seconde tangente par  $S_1$  est déterminée d'une manière absolument univoque. Son point de tangence B sur  $C^3$  s'obtient avec  $\overline{S_2D}$ , D étant le point de coupe de  $a_1$  avec la tangente de  $K_1^2$  en H.

En joignant  $S_1$  et B à  $S_2$  nous obtenons 2 rayons  $\overline{S_2S_1}$  et  $\overline{S_2B}$  conjugués mais non réciproques.

A chaque position de  $S_1$  sur  $C^3$  correspondront deux rayons de ce genre en  $S_2$ . Ces rayons formeront ainsi deux divisions homographiques concentriques en  $S_2$ . La tangente de rebroussement sera un rayon double.

Le 2<sup>e</sup> rayon double correspondra à un point J pour lequel les deux tangentes de  $C^3$  menées par J seront confondues et auront le même point de tangence J. Deux tangentes confondues avec un même point simple de la courbe comme point de tangence forment une tangente d'inflexion et le point considéré est un point d'inflexion.

Pour déterminer ce deuxième rayon double nous devons d'a-

$D_1$  et D. Elle passe par D et A sur  $P_1$ . A est également le point de tangence de  $K^3$  avec  $P_1$ .

La base  $P_1$  rencontre la courbe  $K^3$  en son point de tangence et un autre point B situé sur  $P_1$  et sur la tangente  $\overline{D_1B}$  de  $C_1^2$  par  $D_1$ . Cette tangente représente 2 rayons confondus du faisceau  $D_1$ ; le rayon homologue  $\overline{ND}$  par D donne un point double sur  $P_2$  soit  $B_1B_2$ . La droite  $\overline{B_1B}$  ou  $\overline{B_2B}$  forme deux tangentes confondues de la courbe  $K^3$ ; elles se coupent en B qui est un point de  $K^3$ ; la tangente de  $K^3$  en B est donc  $\overline{BB_1}$  ou  $\overline{BB_2}$ . Puisque  $D_1$  est déjà sur une tangente  $P_2$  de  $C_1^2$  nous ne pouvons plus mener que la tangente  $\overline{D_1B}$  par ce point. La base  $P_1$  coupe  $P_2$  en E, et ce point est conjugué des points de tangence confondus  $E_1$  et  $E_2$ . La tangence de  $K^3$  par B coupe  $P_2$  en  $B_1$ . Les points E et  $B_1$  sont donc conjugués d'une manière absolument univoque sur  $P_2$ . A chaque position de la base  $P_1$  sur la courbe  $K^3$  correspondent ainsi deux points conjugués sur  $P_2$ . Ces points forment 2 divisions homographiques de même base avec le point d'inflexion  $E_1 E_2$  comme point double.

Le 2<sup>e</sup> point double correspondra à une tangente V de  $K^3$  pour laquelle son point de tangence avec  $K^3$  et son autre point de coupe avec  $K^3$  sont confondus. Les tangentes en ces deux points confondus sont elles-mêmes confondues avec V, donc le point est un point de rebroussement et la tangente

bord chercher une autre paire de rayons conjugués par  $S_2$ .

Nous prendrons A comme nouveau point de  $C^3$ . Les rayons  $\overline{AS_1} = a = L$  et  $S_2S_1 = L_1$  sont conjugués. Ils peuvent déterminer une nouvelle conique auxiliaire  $K_2^2$ . Pour celle-ci on a :

une tangente par  $S_2$  en  $S_2$   
 une tangente par A en C, et  
 la tangente  $\overline{DE}$  relative aux rayons par le point B.

En procédant comme précédemment nous devons chercher le point de coupe de  $L_1$  avec la conique  $K_2^2$ . Soit  $H'$  ce point ; il faudra mener ensuite la tangente de  $K_2^2$  par  $H'$  jusqu'en  $D'$  sur L.

Pour y arriver nous cherchons le point de tangence T de DE au moyen des triangles inscrits et circonscrits relatifs aux points  $S_2$ , C et T. Nous utilisons le point de Brianchon.

Cela étant, nous considérons les faisceaux  $S_2$  et C pour la conique  $K_2^2$  et leur centre d'homographie  $\alpha$  ; nous en déduisons aisément le point de coupe  $H'$  de  $S_2S_1$  avec  $K_2^2$ . La tangente en  $H'$  s'obtient avec le triangle circonscrit mené par les points  $S_2C$  et  $H'$ . On emploie la droite de Pascal.

La tangente trouvée coupe L en  $D'$ . Les rayons  $\overline{S_2A}$  et  $\overline{S_2D'}$  sont deux nouveaux rayons conjugués des faisceaux en  $S_2$ .

Il reste à déterminer le rayon double. On utilise la construction bien connue par laquelle on coupe les faisceaux en  $S_2$  par une conique. On emploie la première conique  $K_1^2$ .

V une tangente de rebroussement.

Pour obtenir ce point, nous devons avoir une 2<sup>e</sup> paire de points conjugués sur  $P_2$ .

Soit  $DD_1$  une nouvelle tangente de  $K^3$ . Les points conjugués D et E sont pris comme sommets des faisceaux déterminant la nouvelle conique auxiliaire  $C_2^2$ . Pour celle-ci on a :

le point  $E_1E_2$  et la tangente en ce point,  
 le point D et la tangente  $DD_2$ ,  
 puis le point de coupe C des rayons relatifs à la tangente  $\overline{BB_1}$ .

On doit avoir ensuite la tangente par E à  $C_2^2$  et son point de tangence  $N'$  sur  $C_2^2$  afin de déterminer le rayon  $DN'$  donnant le point  $B'_1B'_2$  et la tangente  $\overline{B'B'_1}$  ou  $\overline{B'B'_2}$ .

On cherche d'abord la tangente de  $C_2^2$  par C avec les triangles inscrits et circonscrits des points  $E_1DC$ . On se sert de la droite de Pascal et on trouve la tangente CF.

Les ponctuelles sur  $ED_1$  et  $DD_2$  déterminent aussi la conique  $C_2^2$  ; l'axe d'homographie est  $E_1D$ . On en déduit sans peine la tangente de  $C_2^2$  par E soit EM. Le point de tangence  $N'$  est établi avec le triangle circonscrit  $D_2EM$ .

On a utilisé le point de Brianchon.

Le rayon  $DN'$  coupe  $P_2$  en  $B'_1B'_2$ . Les points  $D_1$  et  $B'_1$  sont deux nouveaux points conjugués des ponctuelles sur  $P_2$ . Il faut encore trouver le 2<sup>e</sup> rayon double. Au moyen de la construc-

On obtient alors le rayon  $\overline{S_2J}$ . Le point de coupe de ce rayon avec la cubique  $C^3$  est J; on le trouve aussi avec la conique  $K_1^2$ .

D'après ce qui précède, le point J est le point d'inflexion cherché.

Soit J le point d'inflexion et  $K_3^2$  la conique relative aux faisceaux  $S_2$  et J.

Les rayons conjugués déterminant cette conique sont  $S_2S_1 = a'_1$  et  $JS_1 = a'$ . Désignons par  $H''$  le point de coupe de  $a'_1$  avec  $K_3^2$ .

Nous aurons  $JH''$  et la tangente de  $K_3^2$  par J qui doivent être confondues. Donc la ligne de jonction de J avec  $H''$  est une tangente de la conique auxiliaire  $K_3^2$ .

Basé sur cette observation, nous pouvons déterminer la tangente d'inflexion par J. Ce sera la deuxième tangente de la conique auxiliaire de J par J.

Pour cette conique  $K_3^2$  nous aurons la tangente en  $S_2$ , le rayon  $\overline{JS_1}$  qui est aussi une tangente et les tangentes III et IV provenant des points A et B.

Nous obtiendrons la tangente en J avec le théorème de Brianchon.

Le point de tangence  $H''$  de celle-ci avec  $K_3^2$  est également sur le premier rayon  $\overline{S_2S_1}$ .

tion connue avec la première conique  $C_1^2$  on arrive au point S.

On construit la tangente en S de  $K^3$  également avec la courbe  $C_1^2$ .

D'après ce qui précède, cette tangente de la courbe  $K^3$  par S est la tangente de rebroussement cherchée.

Soit  $P_3 = V$  par S, la tangente de rebroussement, et  $C_3^2$  la conique auxiliaire relative aux droites  $P_2$  et  $P_3$ .

Les points conjugués qui déterminent cette conique sont T et  $D_1$  sur  $P_1$ . Le deuxième point de coupe R ou  $A''$  de  $P_3$  avec  $C_3^2$  doit être confondu avec  $B''$  sur  $K^3$ , et il en sera de même des tangentes de  $K^3$  par ces points. En conséquence, le point de coupe de R de  $P_3$  avec  $C_3^2$  est situé sur la tangente de  $C_3^2$  passant par  $D_1$ .

Basé sur cette observation, nous pouvons déterminer le point de rebroussement R, sur la tangente de rebroussement ST.

La conique  $C_3^2$  est déterminée par les bases  $P_2$  et  $P_3 = ST$ . T est sur  $P_1$ , il est alors le conjugué de  $D_1$ .

Nous avons pour  $C_3^2$ : la tangente  $P_2$  en  $E_1$ , le point T, les points I et II provenant des tangentes  $BB_1$  et  $BE$  de  $K^3$ .

Le point de rebroussement est le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P_3$  avec  $C_3^2$ . On l'obtient par l'hexagone de Pascal. C'est R.

La tangente de  $C_3^2$  en R doit passer par  $D_1$ .

### 3. Méthode involutive. (Fig. 3.)

Les faisceaux de la correspondance sont également  $S_2$  et

### 4. Méthode involutive. Fig. 4.)

Les bases de la correspondance étant également  $P_1$  et  $P_2$ ,



$S_1$  et ils engendrent une courbe du 3<sup>e</sup> degré  $C^3$ . Les rayons de  $S_2$  forment une involution que l'on coupe par un cercle  $K$ . Le centre correspondant est  $P$ . Les faisceaux homographiques simples en  $P$  et en  $S_1$  engendrent la conique auxiliaire  $C^2$ .

Comme nous considérons le cas où  $S_2$  est un point de rebroussement, la droite  $\overline{Pd}$  relative au rayon  $S_2S_1$  doit être une tangente de  $K$  en  $d_1d_2$ .  $Sd_1$  est donc la tangente de rebroussement en  $S_2$ .

La tangente en  $S_1$  dépend du rayon  $\overline{Pa_1a_2}$ . Elle coupe encore la courbe  $C^3$  en  $A$ . La seconde tangente par  $S_1$  est donnée par la tangente  $\overline{Pb_1b_2}$  de  $K$ ; c'est  $\overline{S_1bB}$  avec le point de tangence  $B$  sur  $\overline{S_2b_1B}$ .

Dès maintenant nous pouvons considérer un point quelconque  $E$  de  $C^3$  comme sommet du faisceau simple engendrant la courbe avec  $S_2$ . Le rayon  $\overline{ES_1}$  coupe  $C^3$  en  $C$ .  $\overline{S_2S_1}$  et  $\overline{S_2C}$  sont conjugués à  $\overline{ES_1C}$ . L'involution en  $S_2$  admettra un nouveau centre en  $P'$  sur la tangente  $\overline{Pd_2}$ . Il se trouvera également sur la transversale  $a_1c_1$ .

La tangente  $\overline{P'b'_1}$  de  $K$  détermine le rayon  $\overline{S_2b'_1B'}$  et la tangente  $\overline{EB'}$  de  $C^3$  par  $E$ . On a trouvé  $B'$  au moyen des faisceaux primitifs  $S_2$  et  $S_1$ .

Les rayons  $\overline{S_2S_1} = x$  et  $\overline{S_2B} = x'$  puis  $\overline{S_2E} = y$   $\overline{S_2B'} = y'$  forment comme précédemment deux paires de rayons univoquement conjugués, mais non réciproques. Ils appartiennent à deux

elles engendrent une courbe de 3<sup>e</sup> classe  $K^3$ . Les points sur  $P_2$  forment une involution: en menant un cercle  $C$  tangent de  $P_2$ , les tangentes issues des points conjugués donnent un axe d'involution  $\overline{ab}$ . Les divisions homographiques sur  $\overline{ab}$  et sur  $P_1$  engendrent une conique auxiliaire  $K_1^2$ .

Nous considérons le cas où  $P_2$  est une tangente d'inflexion. Il faut qu'une des droites  $\overline{Aa}$  ou  $\overline{Ab}$  soit une tangente de  $K_1^2$ .  $A$  est le point de coupe des bases et  $a$  ou  $b$  sont les intersections de l'axe  $\overline{ab}$  avec  $C$ . La tangente de  $C$  par  $a$  donne le point d'inflexion sur  $P_2$ ,  $\overline{Aa}$  étant la tangente de  $K_1^2$ . Le point de tangence de  $P_1$  dépend de la tangente de  $C$  par  $A = C_1$ . La tangente est  $\overline{C_1c}$  et le point de tangence cherché est  $C$  sur  $P_1$ .

Le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P_1$  avec  $K^3$  est déterminé par la tangente de  $K_1^2$  par  $b$ ; c'est  $B$ .

En désignant  $C$  par  $x$  et  $B_1B_2$  conjugués de  $B$  par  $x'$ , nous aurons deux points univoquement conjugués et non réciproques sur  $P_2$ .

Prenons maintenant une autre tangente de  $K^3$  soit  $EE_1 = P_3$  comme nouvelle base simple. On a  $E_1 = y$ . Les points  $C_1$  et  $E_2$  sont conjugués sur  $P_2$  et les tangentes correspondantes à  $C_1$  se coupent en  $e'$ ; le nouvel axe d'involution est  $\overline{ae'}$ , car  $a$  est l'enveloppe de tous ces axes. Cet axe coupe  $C$  en  $b'$ . La tangente de  $C$  par  $b'$  donne le point conjugué de  $E_1$ , soit  $y'$ .

Les points conjugués  $.xx'$  et



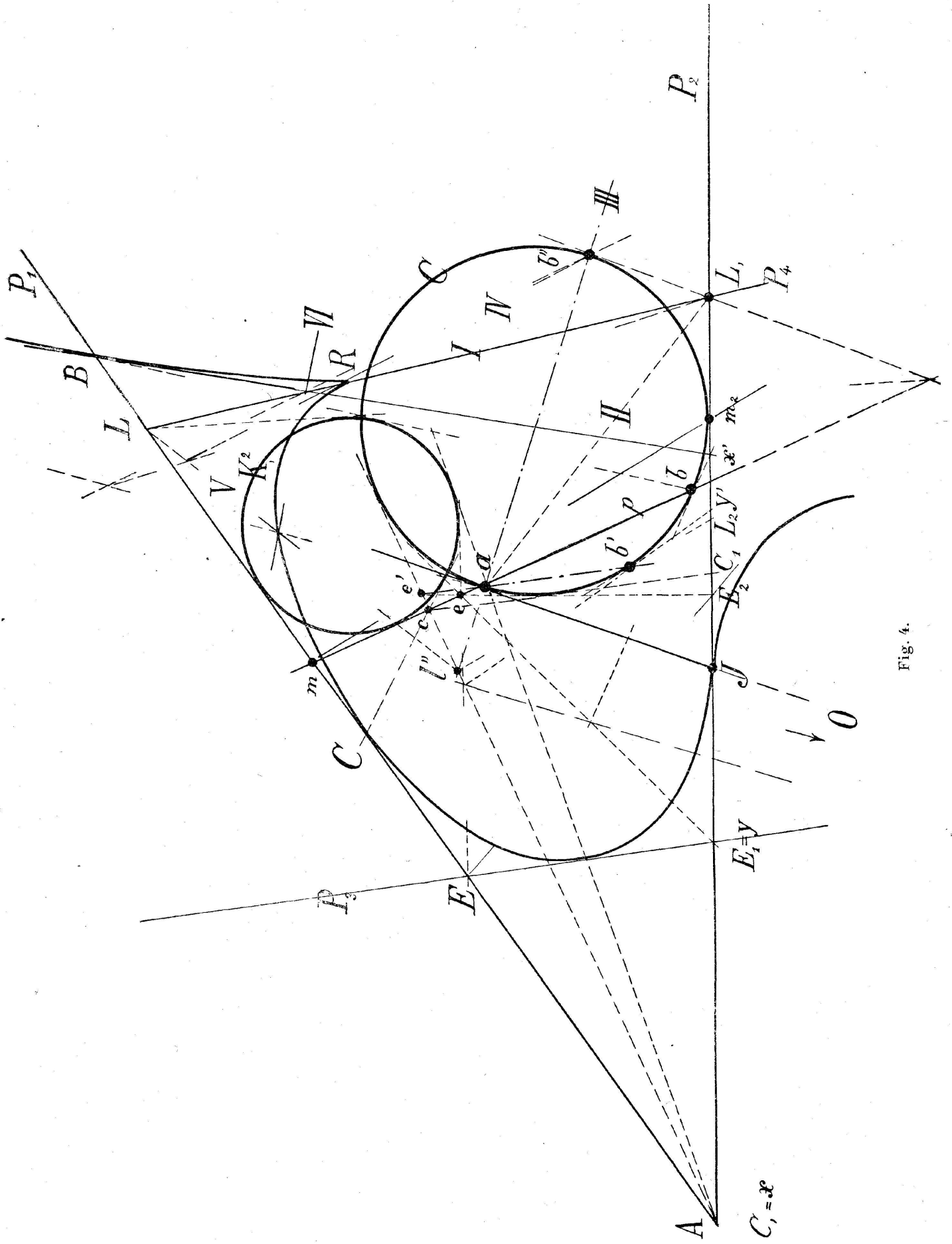


Fig. 4.

faisceaux homographiques concentriques en  $S$ .  $\overline{S_2 d_1}$  ou la tangente de rebroussement est un rayon double.

Le second rayon double passera par un point simple de  $C^3$  tel que les deux tangentes de  $C^3$  par ce point seront confondues. Le second rayon double passera donc par le point d'inflexion.

Comme d'après ce qui précède il n'y a qu'un tel rayon, il n'y aura qu'un seul point d'inflexion sur la courbe  $C^3$ .

On obtient ce deuxième rayon double au moyen du cercle primitif  $K$ . L'axe d'homographie correspondant est  $\overline{d_1 g}$  avec  $g$  sur  $K$ . Le rayon double passe par  $S_2$  et par  $g$ .

Nous déterminerons le point d'inflexion  $J$  en cherchant l'intersection de  $S_2 g$  avec  $C^3$  au moyen des faisceaux primitifs.

Si la cubique est déterminée par les faisceaux  $S_2$  et  $J$ ,  $S_2$  étant un point de rebroussement et  $J$  un point d'inflexion, nous désignerons la conique auxiliaire par  $C_2^2$ . Le point de coupe de  $S_2 J$  avec  $C_2^2$  soit  $d''$  sera sur la tangente de  $K$  par  $d_1$ ,  $d_1$  étant sur  $K$  et sur la tangente de rebroussement.  $P''$  sera sur  $dd''$  et sur  $C_2^2$ . D'un autre côté, la tangente de  $K$  par  $P''$  donnera un point de tangence  $g$  sur  $S_2 J$ .

Pour trouver la tangente d'inflexion par  $J$  nous établirons la conique précédente  $C_2^2$  et nous procéderons ensuite comme pour la tangente en  $S_1$ . Nous prendrons le 2<sup>e</sup> point de coupe de  $P'' g$  avec  $C_2^2$  soit  $\alpha'$ , et la droite  $J\alpha'$  sera la tangente désirée.

$yy'$  sur  $P_2$  appartiennent à deux divisions homographiques simples sur  $P_2$ ; le point d'inflexion  $J$  est un point double de ces divisions.

Elles ont encore un second point double  $L_1$  et la tangente de  $K^3$  par  $L_1$  donnera une tangente de rebroussement, puisque son second point de coupe avec  $K^3$  est confondu avec son point de tangence et que les tangentes en ces points sont également confondues.

Comme il n'y a qu'un deuxième point double possible, il n'y a donc qu'une seule tangente de rebroussement de la courbe  $K^3$ .

Nous trouverons le point double  $L_1$  avec le cercle  $C$  et les tangentes par  $xx'$  et  $yy'$ . Nous obtenons un centre d'homographie  $O$  et la tangente de  $C$  par ce point donne  $b''$  sur  $C$ , puis  $L_1$  le point cherché sur  $P_2$ .

Nous aurons la tangente de rebroussement par  $L_1$  en utilisant les bases primitives  $P_1$  et  $P_2$ . Nous trouverons ainsi la tangente  $\overline{LL_1}$ .

Si la courbe  $K^3$  est déterminée par les divisions  $P_2$  et  $P_4 = \overline{LL_1}$ , nous aurons une nouvelle conique auxiliaire  $K_2^2$ . Soit  $L_1$  le point de coupe des bases, la 2<sup>e</sup> tangente de  $K^3$  par  $L_1$  sera  $\overline{L_1 R}$ , la 2<sup>e</sup> tangente de  $C$  par  $L_1$  sera  $\overline{L_1 b''}$ , les points  $a$  et  $b''$  sont sur  $C$  et sur l'axe d'involution.

La tangente de  $C$  par  $a$  donne le point d'inflexion et la tangente de  $K_2^2$  par  $b''$  passe par le point de rebroussement  $R$ .

Pour trouver le point de rebroussement lui-même, nous construirons la conique précé-

La conique auxiliaire  $C_2^2$  relative à  $J$  est donnée par les conditions suivantes : elle passe par  $J$ , par  $d''$  sur  $S_2J$  et la tangente de  $K$  par  $d_1$ , puis par  $P''$  sur  $d''d_1$  et la tangente de  $K$  par son second point de coupe  $g$  avec  $S_2J$ .

Nous pouvons en outre prendre les points  $IV$  et  $V$ . Le premier est déterminé au moyen des rayons homologues  $SE$  et  $IE$ ;  $S_2E$  coupe  $K$  en  $c_2$ ;  $P''c_2$  coupe ensuite  $IE$  en  $IV$  sur  $C_2^2$ .

On a de même  $V$  au moyen du point de  $B$ .

Nous cherchons ensuite le 6<sup>e</sup> point de  $C_2^2$  sur  $P''g$ , par l'hexagone de Pascal.

*La ligne de jonction de ce point avec  $J$  est la tangente d'inflexion.*

Comme 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> points nous pouvons aussi utiliser le conjugué de  $J$  par rapport au corésiduel  $V$ , et enfin nous pourrions nous servir des points de coupe de  $K$  avec la première conique auxiliaire  $C_1^2$ .

Ce dernier procédé est le moins avantageux, car seuls ces points ne peuvent pas être établis avec la règle et le compas.

Dans les autres considérations tous les points peuvent être établis avec la règle et le compas.

dente  $K_2^2$  et nous chercherons sa 2<sup>e</sup> tangente par  $b''$ .

La conique auxiliaire  $K_2^2$  relative à  $LL_1$  est donnée par les tangentes  $P_4 = I$ ,  $L_1a = II$  et l'axe d'involution correspondant  $\overline{ab''} = III$ .

Nous prenons en outre les tangentes  $V$  et  $VI$ . Pour trouver  $V$  nous menons par  $L_2$  la tangente de  $C$  jusqu'à  $l''$  sur l'axe  $ab''$  puis on a  $l''L_2 = V$ . On a de même  $VI$  au moyen de la tangente  $BB_1 = Bx'$  de  $K^3$ .

Nous cherchons la tangente de  $K_2^2$  par  $b''$  au moyen de l'hexagone de Brianchon.

*Le point de coupe de cette dernière tangente avec  $\overline{LL_1}$ , soit  $R$  est le point de rebroussement.*

Les 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> tangentes nécessaires peuvent être des tangentes communes de  $K$  et  $C_1^2$  ou encore la tangente conjuguée de  $LL_1$  par rapport à la droite corrésiduelle  $mm_2$ .

De ces diverses méthodes, celle des tangentes communes à toutes les coniques du faisceau homographique possible de la division sur la droite corrésiduelle est la moins avantageuse au point de vue constructif.

Toutes les autres méthodes conduisent à des constructions réalisables par la règle et le compas, ce qui n'est pas le cas pour la méthode des tangentes communes.

Les observations qui précèdent nous montrent que la construction des points d'inflexion dans les courbes du 3<sup>e</sup> degré et de la 3<sup>e</sup> classe, ainsi que celle des tangentes de rebroussement dans les courbes de la 3<sup>e</sup> classe et de 3<sup>e</sup> degré peuvent être entièrement exécutées avec la règle et le compas,

et cela de plusieurs manières différentes. Ces observations nous conduisent en outre aux règles dualistiques suivantes résumant les constructions :

*Une cubique  $C^3$  à point de rebroussement  $S_2$  étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de  $S_2$  avec chaque point  $S_1$  est univoquement conjuguée à la ligne de jonction de  $S_2$  avec le point de tangence  $B$  de la tangente de  $C^3$  menée par  $S_1$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en  $S_2$  dont les rayons doubles sont d'une part la tangente de rebroussement et d'autre part une droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3<sup>e</sup> classe  $K^3$  à tangente d'inflexion  $P_2$  étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de  $P_2$  avec chaque tangente simple  $P_1$  est univoquement conjugué au point de coupe de  $P_2$  avec la tangente de  $K^3$  menée par le point d'intersection de  $P_1$  avec  $K^3$ .*

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base  $P_2$ ; les points doubles sont d'une part le point d'inflexion et d'autre part, un point situé sur la tangente de rebroussement.*

L. CRELIER (Berne-Bienne).

---

## SUR LES COURBES DE RIBAUCCOUR

---

Dans une récente thèse *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), M. Léopold BRAUDE a appelé l'attention sur certaines courbes qu'il a nommées *Zwischenevolute* et que je désignerai par la dénomination de *développées intermédiaires*. Soit une courbe plane (C); soit P le point qui divise en une raison donnée  $\lambda$  le rayon de courbure  $M\mu$  de la courbe (C) en M, c'est-à-dire soit P le point tel que l'on ait :

$$\frac{M\mu}{MP} = \lambda ;$$

$\lambda$  étant un nombre algébrique fixé, lorsque le point M décrit la