# Sur les rayons de courbure principaux en un point d'une quadrique.

Autor(en): **Bioche, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1913)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14861

diculaires à OA, OB, OC, il résulte du lemme cité que les rayons doubles de deux faisceaux homographiques $O(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ et $O(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ déterminent les directions asymptotiques de l'hyperbole. Ces faisceaux déterminent aussi sur la droite de fuite deux divisions homographiques et les points doubles de ces divisions sont les points d'intersection de la droite de fuite avec l'hyperbole ; nous pouvons donc appliquer le théorème général cité et on obtient le théorème proposé.

*Problème.* Le théorème permet de résoudre le problème suivant : Soient ABC un triangle et un point O ; trouver les points tels que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites OA, OB, OC rencontrent les côtés BC, AC, BA en points situés sur la droite. Le lieu de ces points est l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, O.

Cas particulier. — Nous savons que l'hyperbole équilatère, passant par les sommets d'un triangle ABC, passe aussi par le point d'intersection des hauteurs de ce triangle ; cette remarque fournit le théorème suivant :

Soient un triangle ABC et un point O. Joignons OA, OB, OC et menons par le point S, qui est l'intersection des hauteurs du triangle, les perpendiculaires aux droites OA, OB, OC. Ces perpendiculaires couperont les côtés BC, CA, BA en trois points situés en ligne droite.

Ant. Pleskot (Pilsen, Bohême).

---

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

## Sur les rayons de courbure principaux en un point d'une quadrique.

*A propos d'une Note de* M. Turrière.

Cette Note m'a été inspirée par la lecture d'un très intéressant article de M. Turrière (*Enseignement mathématique* du 15 mars 1911) et par la correspondance que j'ai eue avec M. Turrière à cette occasion.

M. Turrière rappelait un théorème de Steiner qui peut s'énoncer ainsi : *Soit* C *le centre de courbure d'une conique pour un point* M, *soit* M′ *le conjugué de* M *sur le cercle* MC *par rapport au cercle orthoptique on a*

$$MM' + MC = 0 . \qquad (I)$$

M. Turrière a établi une relation analogue pour une quadrique en considérant la sphère de Monge de cette quadrique comme la généralisation du cercle orthoptique d'une conique. Or on peut considérer aussi, comme généralisation de ce cercle, la quadrique lieu des points d'où on peut mener à la quadrique donnée 3 tangentes rectangulaires 2 à 2. On obtient ainsi, en considérant les deux quadriques correspondant au cercle orthoptique, deux formules qui donnent des relations généralisant la relation (I).

Si on rapporte une quadrique à un système d'axes formé des directions principales de l'indicatrice en un point M, et par la normale en ce point, l'équation de la quadrique peut s'écrire

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx - 2z = 0 \,. \qquad \text{(Q)}$$

Si on désigne par C et C' les centres de courbure principaux on a facilement

$$\frac{1}{\mathrm{MC}} = \mathrm{A} \,, \qquad \frac{1}{\mathrm{MC}'} = \mathrm{A}' \,.$$

L'équation du cône circonscrit à la quadrique (Q), et ayant pour sommet un point (O, O, $h$) de la normale en M, est

$$(\mathrm{A}''h^2 - 2h)(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx - 2z) - \\ [h(\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z - 1) - z]^2 = 0 \,.$$

Les coefficients des termes du 2<sup>e</sup> degré dans cette équation sont respectivement

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 &= (\mathrm{A}''h^2 - 2h)\mathrm{A} - \mathrm{B}'^2h^2 & 2\mathrm{B}_1 &= -2\mathrm{B}h \,, \\ \mathrm{A}'_1 &= (\mathrm{A}''h^2 - 2h)\mathrm{A}' - \mathrm{B}^2h^2 & 2\mathrm{B}'_1 &= -2\mathrm{B}'h \,, \\ \mathrm{A}''_1 &= -1 \,, & 2\mathrm{B}''_1 &= -2\mathrm{B}\mathrm{B}'h^2 \,. \end{aligned}$$

Pour que le cône puisse être *inscrit* dans un trièdre trirectangle (autrement dit que son sommet soit sur la sphère de Monge), il faut et il suffit que

$$(\mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{A}\mathrm{B}'^2 - \mathrm{A}'\mathrm{B}'^2)h^2 - 2\mathrm{A}\mathrm{A}'h - (\mathrm{A} + \mathrm{A}') = 0 \,.$$

Cette condition s'obtient en écrivant que l'invariant

$$(\mathrm{A}'_1\mathrm{A}''_1 - \mathrm{B}_1^2) + (\mathrm{A}''_1\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}'^2_1) + (\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1 - \mathrm{B}''^2_1)$$

est nul, et en supprimant le facteur $\mathrm{A}''h^2 - 2h$ qui annule les trois binômes à la fois. Si M' est le conjugué de M par rapport à la sphère de Monge, on a, en désignant par $h'_1$ et $h'_2$ les racines de l'équation en $h$,

$$\frac{2}{MM'} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2'} = -\frac{2AA'}{A + A'} = -\frac{2}{MC + MC'},$$

donc

$$MM' + MC + MC' = 0 . \tag{II}$$

Pour que le cône puisse être *circonscrit* à un trièdre trirectangle, il faut et il suffit que

$$A_1 + A_1' + A_1'' = [(A + A')A'' - B^2 - B'^2]h^2 - 2(A + A')h - 1 = 0 .$$

Soit $M''$ le point conjugué de M par rapport à la quadrique, lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à la quadrique (Q); on doit avoir, en désignant par $h_1''$ et $h_2''$ les racines de la dernière équation en $h$,

$$\frac{2}{MM''} = \frac{1}{h_1''} + \frac{1}{h_2''} = -2(A + A') = -2\left(\frac{1}{MC} + \frac{1}{MC'}\right)$$

ou

$$\frac{1}{MM''} + \frac{1}{MC} + \frac{1}{MC'} = 0 . \tag{III}$$

Les relations (II) et (III) donnent respectivement la relation (I); l'une lorsque la quadrique s'aplatissant, un des rayons de courbure devient nul; l'autre lorsque la quadrique devenant un cylindre, l'un des rayons de courbure devient infini.

Enfin, en rapprochant les relations (II) et (III) on obtient la suivante

$$MM' \times MM'' = MC \times MC'$$

que m'a fait remarquer M. Turrière.

Ch. Bioche (Paris).