Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Autor(en): **Combebiac, G.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

D'où

$$R_{k-1} \equiv me_k + z_k (\mathrm{mod}\ N) .$$

De $R_k < N$, ou $10z_k + e_k < 10m - 1$, résulte $z_k < m - 1$. En tenant compte, en plus, de $e_k \leqq 9$, on a $me_k + z_k < 10m - 1$ et

$$R_{k-1} = me_k + z_k \quad ,$$

ce qui est la formule récurrente, retrouvée à nouveau.

Le $k^{\text{ième}}$ chiffre de la période, se déduit comme nombre entier de $\frac{10R_{k-1}}{10m - 1}$ et comme

$$10R_{k-1} = 10(me_k + z_k) = (10m - 1)e_k + 10z_k + e_k$$

on voit de suite qu'il est justement e_k.

La première démonstration, plus immédiate de la formule récurrente, est due à mon fils P. PASTERNAK, ingénieur à Zurich.

Mai 1911. Léon PASTERNAK (Zurich).

(Traduction de M. F. LÉVY, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur l'axiome planaire de M. Peano.

Parmi les axiomes adoptés par M. PEANO pour le fondement de la Géométrie figure une proposition que l'on peut exprimer de la manière suivante :

A, B, C *désignant trois points qui n'appartiennent pas à une même droite*, D *désignant un point du segment* BC, *et* E *un point du segment* $\overline{AD}$; *la droite* BE *contient un point* F *de la droite* AC ; *ce point appartient au segment* $\overline{AC}$, *et le point* E *appartient au segment* $\overline{BF}$.

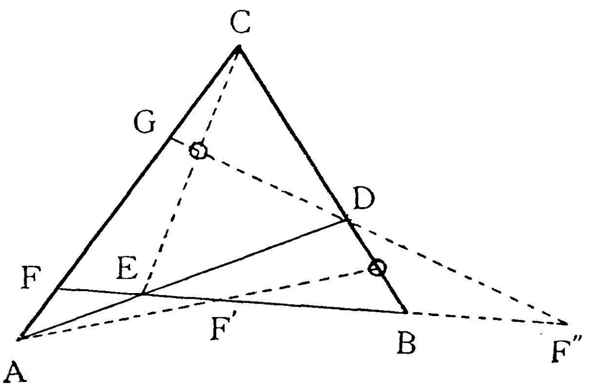
Je sépare, pour les distinguer, les trois propriétés ainsi postulées et dont la première seule est proprement projective, tandis que les deux autres sont visiblement des propriétés de *connexion*.

On sait qu'un second axiome planaire de M. PEANO a été signalé par M. Moore[1] comme superflu et est, en effet, une conséquence du précédent. Il est facile de reconnaître que la troisième des propriétés exprimées ci-dessus est aussi une conséquence des deux premières, et c'est sa démonstration qui fait l'objet de cette Note. Il est d'ailleurs manifeste que l'axiome ainsi réduit ne saurait l'être davantage, car la première propriété constitue la condition évidemment indispensable de l'existence du plan et la seconde définit sa connexion, soit : *le plan est une surface.*

On sait que l'une des propriétés de l'ordre linéaire ouvert peut, appliquée à la droite, être exprimée de la manière suivante :

Parmi trois points d'une droite, il y en a toujours un, et un seulement, qui appartient au segment défini par les deux autres.

Il suffit donc d'établir que F ne peut pas appartenir au segment $\overline{BE}$ ni B au segment $\overline{EF}$.



Le point D appartenant au segment $\overline{BC}$, C ne peut appartenir au segment $\overline{BD}$ (propriété de l'ordre linéaire ouvert), et, par suite, aucune droite contenant A et un point de ce segment ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, deux droites ne pouvant avoir plus d'un point commun. En conséquence, F′ désignant un point quelconque du segment $\overline{BE}$, la droite $\overline{AF'}$, devant contenir un point du segment $\overline{BD}$ (axiome réduit), ne pourra contenir aucun point de la droite AC distinct de A, et, par suite, F′, c'est-à-dire un point quelconque du segment $\overline{BE}$, ne peut appartenir à la droite AC.

Si F″ désigne un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$, c'est-à-dire si le point B appartient au segment $\overline{F''E}$, la droite F″D devra contenir un point du segment $\overline{CE}$ (axiome réduit) et devra aussi, par suite, E appartenant par hypothèse au segment $\overline{DA}$, contenir un point G du segment $\overline{CA}$ (axiome réduit). La droite AC ne pouvant ainsi avoir avec la droite GD aucun point

[1] E. H. Moore, On the projective axiomes of geometry, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 3 (1907), p. 147. – Cf. Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1909, p. 7-9.

commun distinct de G, ne peut, en particulier, contenir F″, c'est-à-dire un point quelconque du prolongement du segment $\overline{EB}$.

La troisième des propriétés exprimées dans l'axiome planaire de M. Peano est donc bien démontrée en fonction des deux premières et de celles qui sont exprimées par l'axiome d'ordre rappelé plus haut et par l'axiome d'après lequel *une droite est définie par deux quelconques de ses points.*

G. Combebiac (Limoges).

Sur la topologie des courbes interscendantes.

Extrait d'une lettre de M. G. Loria à Gênes,
à propos d'une Note de M. Turrière (Poitiers).

...Les remarques très sensées de M. Turrière sur les « courbes transcendantes et interscendantes » (*L'Enseignement mathématique,* T. XIV, p. 209) m'entraînent de nouveau dans un champ de recherche où je me suis tenu pendant longtemps et dans lequel je reviens toujours avec plaisir. « J'y suis, j'y reste » pour observer qu'une phrase écrite par ce géomètre a besoin, si je ne me trompe, d'un commentaire pour être comprise à sa juste valeur.

En effet, M. Turrière dit que les paraboles $y = x^m$, m étant un nombre rationnel, s'approchent de plus en plus de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$; or je dis qu'il faut se restreindre à ce qui arrive dans l'angle des coordonnées positives. Pour le prouver, il faut et il suffit de considérer ce qui suit :

1° Suivant que le nombre positif $m \gtrless 1$, et suivant la forme arithmétique de son expression réduite à ses termes moindres, les paraboles $y = x^m$ se présentent sous une des SIX formes données par les figures ci-jointes :

2° Si on développe 2 en fractions continues on trouve

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}} \; .$$

Les premières réduites sont 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{17}{12}$ et les réduites suivantes ont alternativement les formes

$$\frac{2h+1}{2k+1} \quad \text{et} \quad \frac{2h+1}{2k}$$

comme il s'ensuit de la loi de formation des réduites.

Si donc on s'arrête à une réduite de rang impair on a comme « courbe approchante » de la courbe $y = x^{\sqrt{2}}$ une courbe qui a la