5e Démonstration.

En supposant maintenant $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \cdot FM = 2\,AP \cdot AE \;;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \cdot AE = \overline{AD}^2 ,$$

et en appelant I′ le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A′P et N′ le milieu de A′K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = XA' = II' ,$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2 \cdot \overline{XA'}^2 = \overline{XA'}^2 + \overline{II'}^2 .$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{XA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{I'K}^2 ,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{XA'}^2 + \overline{IX}^2) = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{N'A'}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA′ ;

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2 \cdot \overline{IN}^2 + 2 \cdot \overline{NA'}^2 .$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2 \cdot \overline{IN}^2 = 2 \cdot \overline{I'N'}^2 .$$

Donc

$$IN = I'N' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

5ᵉ Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs côtés opposés, I le centre du cercle XYZ, J et K les points de rencontre respectifs avec les droites AI et AC de la droite menée de B perpendiculairement à AI, et enfin α le second point de rencontre de la droite EJ avec le cercle A′B′C′. (Fig. 4.)

On voit sur la figure que les quatre points α, A′, E, C′ sont sur la même circonférence, que le point J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BEK, que C′A′ et AC sont parallèles et que J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E comme j'ai indiqué dans la 3e démonstration ; et d'après ces quatre conditions on doit avoir :

$$\widehat{\alpha A'J} = \widehat{\alpha EC'} = \widehat{\alpha EK} = \widehat{JKE} = \widehat{BJC'} . \qquad (1)$$

Donc αA′ est parallèle à BK et par suite perpendiculaire à AI. Le second point de rencontre des cercles dont les centres sont respectivement en α et A′ et qui se coupent d'abord en J est donc sur la droite AI ; j'appelle L ce second point de rencontre.

Le parallélisme des droites C′A′ et AC donne :

$$\widehat{\alpha JA'} = \widehat{\alpha EK} , \qquad \text{mais} \qquad \widehat{\alpha EK} = \widehat{\alpha A'J}$$

d'après (1), donc :

$$\widehat{\alpha JA'} = \widehat{\alpha A'J} , \qquad \text{par suite} \qquad \alpha A' = \alpha J .$$

D'ailleurs, comme le point α est le milieu de l'arc B′A′C′ et que B′C′ et A′D sont parallèles, ce point α est aussi le milieu de l'arc A′D.

Il s'en suit que le cercle dont le centre est en α et ayant αJ pour rayon passe par les deux points A′ et D.

Ensuite les deux longueurs A′X et A′J étant chacune égale à la demi-différence de AC et AB sont égales entre elles.

Donc, le point X est sur la circonférence de centre A′ et de rayon A′J.

Or, dans le cercle JA′L, on a :

$$\overline{\alpha I}^2 - \overline{\alpha A'}^2 = IJ \, . \, IL ,$$

mais IX étant tangent au cercle JX′L,

$$IJ \, . \, IL = \overline{IX}^2 , \qquad \text{donc :} \qquad \overline{\alpha I}^2 = \overline{IX}^2 + \overline{\alpha A'}^2 . \qquad (2)$$

Maintenant, en désignant par N le centre du cercle A′B′C′, par I′ le pied de la perpendiculaire abaissée du point I à la droite

αN et par X′ le point de rencontre de αN et de A′D, on a dans le triangle αIN

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{IN}}^2 &= \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N} \,.\, (\mathrm{I'X'} \pm \alpha\mathrm{X'}) \\ &= \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N} \,.\, \mathrm{I'X'} - 2 \,.\, \alpha\mathrm{N} \,.\, \alpha\mathrm{X'} \\ &= \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\alpha\mathrm{I}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N} \,.\, \mathrm{IX} - \overline{\alpha\mathrm{A'}}^2 \,. \qquad (3)\end{aligned}$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{\mathrm{IN}}^2 = \overline{\alpha\mathrm{N}}^2 + \overline{\mathrm{IX}}^2 \mp 2\alpha\mathrm{N} \,.\, \mathrm{IX} = (\alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX})^2 \,,$$

on a donc :

$$\mathrm{IN} = \alpha\mathrm{N} \mp \mathrm{IX} \,,$$

ce qui montre que les deux cercles N, I se touchent.

Corollaire. — J est également distant des trois côtés du triangle A′ED.

6e Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5e démonstration, menons la droite passant par les points X et J. (Fig. 5.)

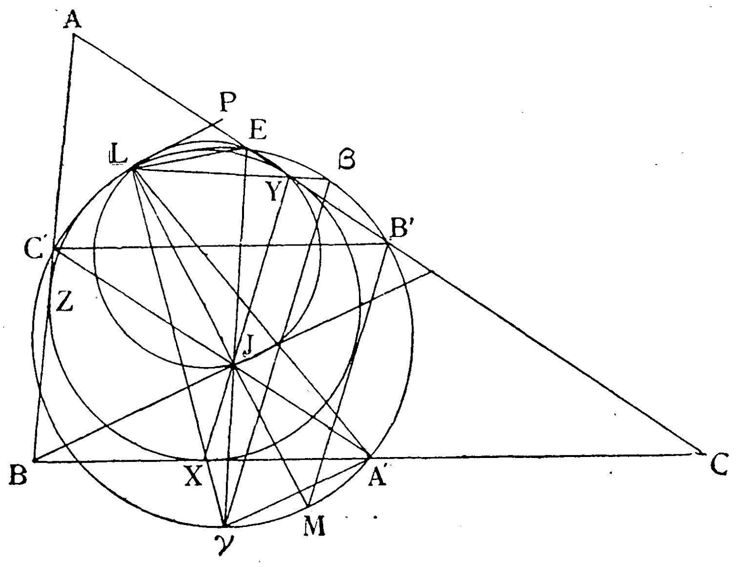

Fig. 5.

Puisque A′J et A′X sont égaux et que A′J et CY sont parallèles, les deux triangles A′XJ et CXY sont des triangles isocèles et équiangulaires; donc XY et XJ coïncident entre eux.

Menons la droite qui passe par deux points α et X et qui rencontre de nouveau en L le cercle A′B′C′.

Les deux angles αLA′ et αA′X étant égaux, le cercle qui passe par les trois points A′, X, L touche la droite αA′ au point A′ ; donc

$$\alpha\mathrm{X} \,.\, \alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{A'}}^2 \,.$$

Mais αJ $=$ αA′ comme on a indiqué dans la 5e démonstration, donc :

$$\alpha\mathrm{X} \,.\, \alpha\mathrm{L} = \overline{\alpha\mathrm{J}}^2 \,,$$