3e Démonstration.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1911)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

l'angle EPF, il sera aussi à l'intérieur de l'angle YPZ ; donc $\widehat{YLZ}$ = [angle inscrit dans seg. PRY + angle inscrit dans seg. PQZ] $= \widehat{YCI} + \widehat{XBI} = \widehat{YXI} + \widehat{ZXI} = \widehat{YXZ}$.

Le point L est donc aussi sur le cercle XYZ.

Enfin, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ qui ont un point commun L, comme on vient de voir, se toucheront en ce même point.

En effet, soient N le centre du cercle A′ B′ C′ et O celui du cercle PYR c'est-à-dire le point milieu de YM ; je joins chacun de ces points aux points E et L, j'aurai :

$$\widehat{OEM} = \widehat{OME}\ , \quad \text{OM est parallèle à IB}\ ,$$

donc

$$\widehat{OEB} = \widehat{IBE} \quad \text{et} \quad \widehat{IBE} = \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{A})\ ,$$

mais

$$\widehat{C} = \widehat{AB'C'}\ , \quad \widehat{A} = \widehat{B'EC'}\ ,$$

par suite

$$\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\,\widehat{B'C'E} = \frac{1}{2}\,\widehat{NEB}\ .$$

Donc, la droite OE divise l'angle NEB en deux parties égales et on a la suite d'égalités :

$$\widehat{NLO} = \widehat{NEO} = \widehat{OEB} = \widehat{IBE} = \widehat{IYO} = \widehat{ILO}\ .$$

La dernière égalité $\widehat{NLO} = \widehat{ILO}$ qui montre que les trois points N, I, L sont en ligne droite prouve en même temps que les deux cercles A′B′C′, XYZ sont bien tangents au point L.

Je viens de démontrer le théorème dans le cas du cercle inscrit, en supposant que l'angle A soit plus petit que les angles B et C. Mais, en supprimant cette hypothèse et en prenant pour cercle XYZ le cercle exinscrit, on pourra faire la démonstration d'une façon presque entièrement analogue ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Les trois cercles QXR, RYP, PZQ se coupent en un même point.

3e Démonstration.

III. — Soient D, E, F les pieds des perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C du triangle aux côtés opposés (fig. 2).

Prenons sur le côté AC de l'angle A, AK = AB et appelons J le point de rencontre avec BK de la bissectrice de l'angle A.

Les points C′, J, A′ étant respectivement les milieux de BA, BK, BC sont situés sur une même droite parallèle à AC.

Les deux points E, F se trouvent sur une même circonférence qui a BC pour diamètre, les deux cordes A′E, A′F du cercle A′B′C′ sont donc égales ; par suite C′J divise l'angle BC′E en deux parties égales.

Il en résulte que le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E, compris dans l'angle A et que le second point de

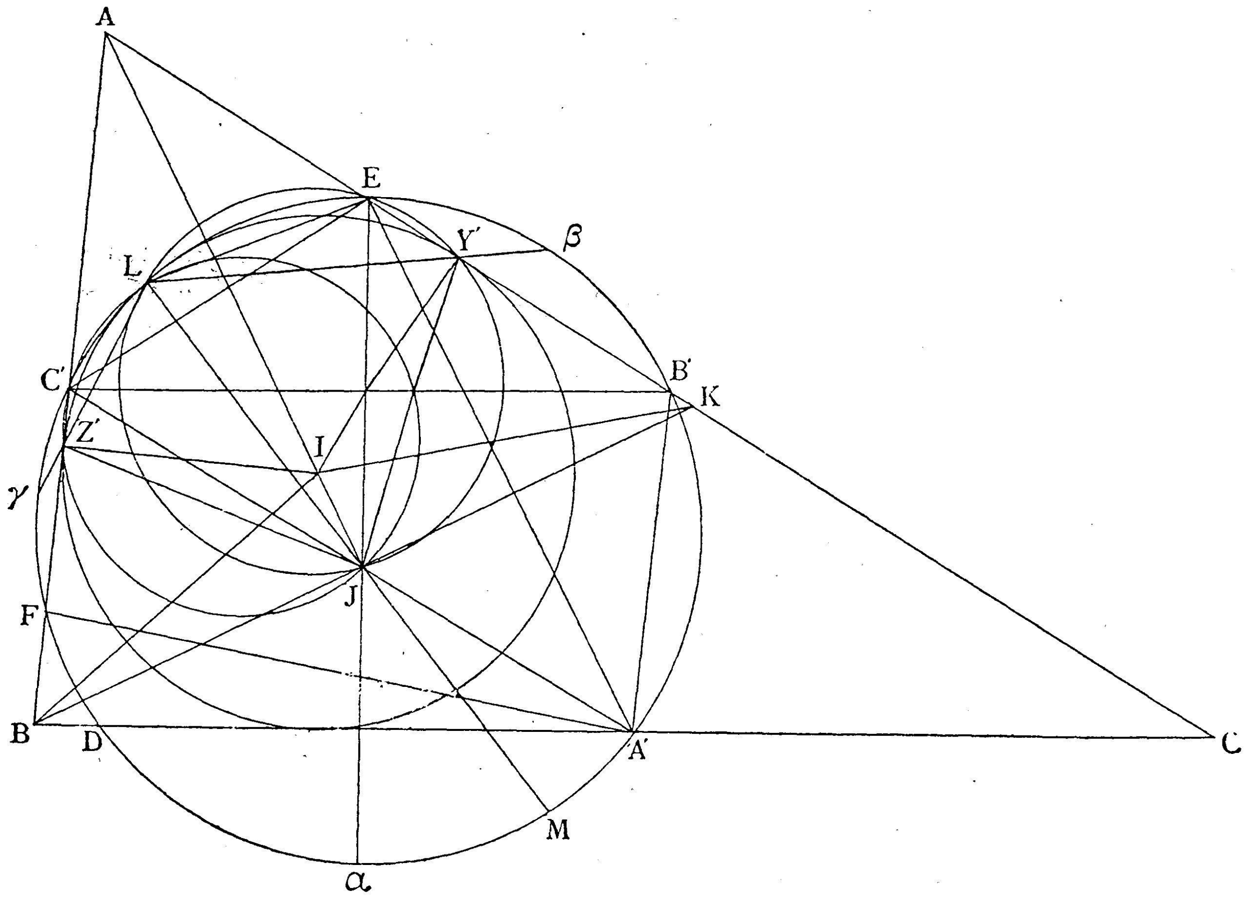

Fig. 2.

rencontre α de EJ avec le cercle A′B′C′ est le milieu de l'arc B′A′C′.

Supposons pour le moment que le cercle XYZ soit le cercle inscrit et que les grandeurs de trois angles du triangle soient dans l'ordre suivant :

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C} .$$

Soient M le milieu de l'arc EA′C′ et L le second point de rencontre de MJ avec la circonférence A′B′C′.

Puisque

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C} ,$$

on a

$$\widehat{B} > \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{A}) > \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

et comme

$$\widehat{C'B'A'} = \widehat{B} ,$$

$$\widehat{C'LM} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{EB'C'}) = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C}) = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}) ,$$

$$\widehat{C'E\alpha} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C'A'B'}) = \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

on a :

$$\widehat{C'B'A'} > \widehat{C'LM} > \widehat{C'E\alpha} .$$

Donc le point M se trouve sur l'axe $A'\alpha$ et par suite L se trouve sur l'arc C'E.

Soient β le milieu de l'arc conjugué de l'arc B'A'E et γ le milieu de l'arc conjugué de l'arc C'A'F et soient Y' et Z' les points de rencontre respectifs de $L\beta$, $L\gamma$ avec AC, AB, on a :

$$\widehat{JLY'} = \widehat{JLE} - \widehat{\beta LE} ,$$

par suite l'angle JLY' est mesuré par

$$\frac{1}{2} \text{ arc } EA'C' - \frac{1}{2} \text{ arc } E\beta B' = \frac{1}{2} \text{ arc } B'A'C' ,$$

c'est-à-dire est égal à l'angle JEY' ; ce qui prouve que le quadrilatère JLEY' est inscriptible à un cercle.

De même, le quadrilatère JLC'Z' est inscriptible.

Donc

$$\widehat{JY'C} = \widehat{JLE} , \quad \widehat{JLC'} = \widehat{JZ'B} ,$$

les deux triangles AJY', AJZ' sont par suite égaux ; d'où l'on a :

$$AY' = AZ' .$$

Si donc on décrivait un cercle ayant son centre I sur AJ et tangent en Y' à AC, ce cercle serait nécessairement tangent en Z' à AB.

Or, puisque la différence des angles inscrits qui interceptent les arcs $\beta A'\gamma$ et $\beta L\gamma$ est égal à la différence des angles qui interceptent les arcs FA'B' et C'LE c'est-à-dire à l'angle A et que la somme des premiers angles est égale à deux droits, on a :

$$\beta L\gamma = 1 \text{ droit} + \frac{A}{2} ;$$

ce qui montre que le cercle I passe par le point L.

Le point de contact Y' du cercle I avec la sécante EB' du cercle

$A'B'C'$, le point de rencontre de ces deux cercles et le milieu β de l'arc EB' étant ainsi situés sur une même droite, ces deux cercles se touchent au point L.

Il nous reste à prouver que le cercle I est le cercle inscrit au triangle ABC.

Or, chacun des angles $IY'K$, IJK étant droit, le quadrilatère $JIY'K$ est inscriptible, on a donc :

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IJY'} = \widehat{EJY'} + \widehat{AJE} ;$$

mais les quatre points E, L, J, Y' étant sur une même circonférence, on a :

$$\widehat{EJY'} = \widehat{ELY'} = \widehat{EL\beta} = \frac{1}{2}\,\widehat{EC'B'}$$

et J étant le centre du cercle exinscrit au triangle $AC'E$:

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2}\,\widehat{AC'E} ,$$

donc

$$\widehat{IKY'} = \frac{1}{2}\,(\widehat{EC'B'} + \widehat{AC'E}) = \frac{1}{2}\,\widehat{AC'B'} = \frac{1}{2}\,\widehat{B} .$$

D'ailleurs,

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IBA} , \qquad \text{donc} \qquad \widehat{IBA} = \frac{1}{2}\,\widehat{B} ,$$

Le point I est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

On a pu ainsi démontrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Si, au lieu de supposer $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ comme je viens de faire, on suppose seulement $\widehat{B} > \widehat{C}$ et qu'à la place de M, β, γ, on mette les points diamétralement opposés, on pourra démontrer d'une façon presque analogue que le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle exinscrit dans l'angle A.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle $AC'E$.

4e Démonstration.

IV. — Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre de ce triangle, N le centre du cercle $A'B'C'$ et I le centre du cercle XYZ. (Si le cercle XYZ est le cercle exins-