DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉE

DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉE

Dans tous les pays civilisés, on s'efforce actuellement d'introduire, dans les écoles moyennes, des éléments du Calcul différentiel et intégral qui, autrefois, était entièrement réservé à l'université. Dans ces écoles, on suit généralement les mêmes procédés que dans les cours universitaires, et l'on peut se demander si cette façon de faire est bien conforme au but poursuivi.

Tout d'abord, la notation présente déjà des difficultés [1], car dans l'expression $\frac{dy}{dx}$ ni dy, ni dx, ni la barre de fraction n'a de signification, mais seulement le symbole entier; on ne doit pas non plus conclure des règles concernant les fractions que $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$.

A ceci viennent se joindre immédiatement les règles sur la différentiation des fonctions de fonctions, $u \,.\, v$ et $u : v$, de telle sorte que l'élève a l'impression qu'il s'agit d'un calcul tout nouveau n'ayant aucun rapport avec celui qu'il a vu précédemment. De même le calcul de

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim{}_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est facile, il est vrai, au point de vue mathématique, mais difficile à comprendre, car une vision claire du sujet fait encore défaut. Comme exemple classique, je choisis la tangente en un point donné. La détermination d'une direction exige dans tous les cas deux points, ou une portion de droite

[1] Voir dans cette Revue, t. I, p. 106 à 110, un article de M. H. Poincaré, sur la *Notation différentielle et l'enseignement,* dans lequel l'auteur recommande que l'on commence par la notation des dérivées. — *N. de la Réd.*

aussi courte que l'on veut du reste ; tout le calcul ne peut donc avoir un sens que si l'on utilise un point voisin du point donné, ou si la courbe se confond avec la tangente le long d'une petite portion de droite. Une méthode qui pose $\Delta x = 0$ me paraît obscurcir le véritable sens du problème. Il ne serait pas non plus permis de diviser par Δx lorsqu'on aurait $\Delta x = 0$. On rencontre donc ici une difficulté provenant de cette façon purement arithmétique de traiter la chose, difficulté qui ne disparaîtra pas par le calcul, mais seulement par l'axiome que l'erreur peut être rendue plus petite qu'une quantité quelconque si petite qu'elle soit. Il est remarquable que dans l'enseignement, on ne mentionne généralement pas l'axiome à cette place, ou, lorsqu'on le fait, comme par exemple dans HESSENBERG[1], l'exposé qu'on en donne est trop peu clair pour les commençants.

Toutes ces difficultés se présentent aussi dans le calcul intégral, car la définition $F(x) = \int f(x)dx$ lorsque $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ suppose connue la notion de dérivée. Ajoutons à cela que l'on suppose parfois que la dérivée est donnée, comme par exemple, la vitesse ; mais dans la plupart des cas, c'est la *différentielle* qui forme le véritable point de départ. Il en est ainsi dans la détermination des moments de rotation et d'inertie et celle également des surfaces et des volumes. Ce sont là les raisons qui expliquent pourquoi le calcul intégral est beaucoup moins traité dans l'enseignement que le calcul différentiel, quoique tous deux présentent une égale importance. Mais comme nous ne nous occupons dans l'enseignement élémentaire que de fonctions qui sont développables en séries de puissances, nous pouvons faciliter l'accès au Calcul infinitésimal, si à côté de la dérivée nous considérons également la *différentielle*.

Le mot « *différentielle* » est employé dans un sens différent. Je ne parle pas des fameuses quantités qui sont plus petites que toutes les autres sans cependant être nulles,

---

[1] *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, 1906, p. 167, l'auteur écrit

$$\left(\frac{x-b}{x-a} - h' < q \quad \text{lorsque} \quad x - a < p\right)$$

ni des valeurs introduites par la définition $dy = f'(x) \, . \, dx$; mais j'entends les petites quantités finies qui sont employées constamment en Physique, Astronomie, Géodésie et dans toutes les Mathématiques appliquées, par exemple, le travail pour un déplacement ds, soit $d\text{W} = \text{F}ds$; le moment statique $d\text{S} = dm \, . \, r$. L'expression « petite » sera caractérisée par le fait qu'on pourra négliger dx^2 et $dx \, . \, dy$ relativement à dx. Etant donné cette hypothèse, le calcul ne sera tout d'abord qu'une approximation; mais il se présente très clairement et n'exige aucune règle spéciale. Par exemple :

1. — $y = \dfrac{a}{x}$ donne successivement

$$(y + dy)(x + dx) = a \; , \quad xdy + ydx = 0 \; , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{a}{x^2} \; .$$

2. — $y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, $y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - a^2$.

$$y^2 + 2ydy - 2xy - 2xdy - 2ydx = -a^2 \; , \quad dy(y - x) = ydx \; ,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - x} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \; .$$

Puis, lorsque l'importance du calcul aura été clairement établie par de nombreux exercices, on montrera qu'en choisissant un dx suffisamment petit ($0{,}001$, 10^{-6}, 10^{-10}, 10^{-100}...) l'erreur peut être rendue plus petite qu'une petite quantité quelconque, et que ce procédé, par conséquent ne fournit pas un résultat *approché,* mais bien *rigoureusement exact.* La notion d'intégrale vient alors faire directement suite à ce qui précède. Par exemple, pour la parabole $y = cx^2$, la surface d'une petite bande sera

$$d\text{S} = ydx + \frac{1}{2} \, dxdy = cx^2dx$$

la surface sera donc $\text{S} = \dfrac{cx^3}{3} = \dfrac{xy}{3}$; il ne resterait qu'à considérer les limites.

On déterminera de la même façon les volumes engendrés par la rotation d'une surface plane autour d'un axe situé dans son plan, puis la vitesse, le chemin parcouru, le moment de rotation et d'inertie, le travail, etc. On peut facilement prouver à l'aide des sommes de puissances, ou par un procédé purement géométrique, que l'erreur provenant du fait qu'on néglige de petits triangles ou anneaux, tend vers zéro ; il en résulte que ces formules sont également rigoureuses. On trouvera des développements plus précis dans mon recueil d'exercices [1].

A la place des trois notions différentes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad dy = f'(x)\,dx$$

que les commençants ont beaucoup de peine à distinguer les unes des autres, il suffit, pour les besoins de l'enseignement et des mathématiques appliquées, d'introduire uniquement les petites quantités dx et dy, au moyen desquelles on obtient des résultats complètement rigoureux en négligeant les puissances supérieures.

A. Schülke (Königsberg, Prusse).

(Traduction de M. J.-P. Dumur, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Courtis Standard Test in Arithmetic.

Un professeur américain, M. S.-A. Courtis, chef du département des sciences et mathématiques à l'Ecole de Détroit *(Detroit Home and Day School)*, a établi un système d'épreuves permettant de mesurer d'une façon pratique et rapide les résultats de l'enseignement de l'arithmétique, en se basant non pas sur le travail individuel des élèves, mais sur l'ensemble des travaux de la classe. Sa méthode d'enquête est le résultat d'une longue expé-

---

[1] *Aufgaben-Sammlung* von A. Schülke. Leipzig, B. G. Teubner, 1910.