2e Démonstration.

fini α de droites de Γ, cette congruence est donc le lieu des intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α, α) d'une surface en elle-même.

Soit P un point quelconque de l'espace. Aux plans tangents à V passant par ce point correspondent les plans d'une développable de classe ν, par suite Γ est d'ordre $n\nu$. On a donc $n = \nu = 1$ et Γ est une gerbe de droites.

Lucien Godeaux (Liège).

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

I. — Théorème. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

En étudiant depuis quelques années le théorème que je viens d'énoncer, j'ai trouvé neuf démonstrations différentes qui me semblent encore nouvelles. La *première* de ces démonstrations a déjà été publiée dans *l'Enseignement mathématique* (VIIe année, 1905, n° 6, p. 479-482) ; j'exposerai donc ici les huit autres à partir de la deuxième.

La 2e et la 3e démonstrations ne dépendent ni des théorèmes des aires, ni de ceux de la proportion ; les quatre autres, depuis la 4e jusqu'à la 7e sont encore indépendantes des théorèmes relatifs à la proportion.

Dans ce qui suit, je désigne toujours par A′, B′, C′ les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par X, Y, Z les points de contact du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits avec les côtés BC, CA, AB. Il s'agit alors de démontrer que le cercle A′ B′ C′ est tangent au cercle XYZ.

2e Démonstration.

Je suppose, pour fixer les idées, que le cercle XYZ soit le cercle inscrit.

Si le triangle était isocèle, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ se toucheraient évidemment, je fais donc la démonstration dans le cas où le triangle est quelconque et je suppose, pour plus de commodité, que l'angle A soit plus petit que chacun des angles B et C.

Soient P, Q, R, les orthocentres des triangles AYZ, BZX, CXY. Décrivons les cercles circonscrits aux triangles PYR, PZQ et qui se coupent de nouveau au point L (fig. 1).

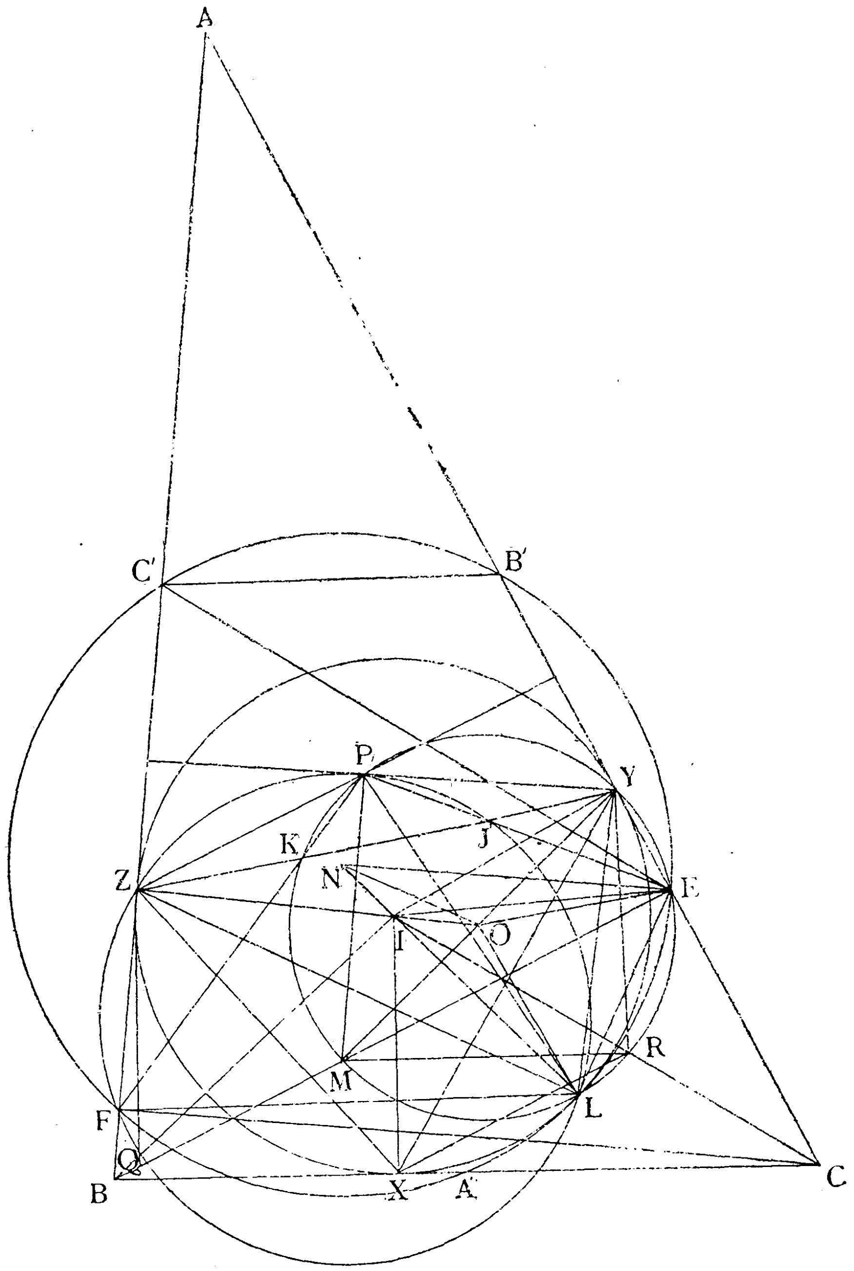

Fig. 1.

Je veux d'abord démontrer que ce point L est situé sur le cercle A′ B′ C′.

Désignons par I le centre du cercle XYZ et par E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C du triangle ABC sur les côtés opposés ; menons par le point Y la parallèle

YM à la droite IB et soit M le point de rencontre de cette parallèle avec la droite BE.

YPZI, YRXI, YMBI étant tous des parallélogrammes, les deux quadrilatères YPMR, IZBX sont égaux, et par suite les angles YPM, YRM qui sont respectivement égaux aux angles IZB, IXB sont droits ; la droite YM est donc le diamètre du cercle PYR et ce cercle passe par le point E. Je remarque en plus que l'angle PMY inscrit dans le segment de cercle PRY est égal à l'angle ZBI.

On peut démontrer de la même façon que le cercle PZQ passe par le point F et que l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ est égal à l'angle YCI.

Si j'appelle J le point de rencontre de la droite PE avec YZ,

$$\widehat{PJZ} = \widehat{EJY} = (2 \text{ droits} - \widehat{CYZ}) - \widehat{JEY} = (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{PMY}$$

$$= (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{ZBI} = \widehat{YCI} .$$

Ce dernier angle YCI étant égal à l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ, on voit que le point J est sur le cercle PZQ.

De même en appelant K le point de rencontre de PF avec YZ, on peut voir que ce point K est sur le cercle PYR.

Or, il est clair que le point J se trouve entre P et E et que le point K entre P et F, il s'en suit que deux points J et F situés sur le cercle PZQ se trouvent l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle PYR, le point de rencontre L est donc dans l'intérieur de l'angle EPF, et l'on a :

$$\widehat{ELF} = \widehat{PLE} + \widehat{PLF} ;$$

mais

$$\widehat{PLE} = \widehat{AYP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ABE} ,$$

et de même

$$\widehat{PLF} = \widehat{AZP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ACF} ,$$

donc

$$\widehat{ELF} = \widehat{ABE} + \widehat{ACF} = 2 . \widehat{ABE} .$$

D'un autre côté, les quatre points B, C, E, F étant sur la même circonférence dont le centre est en A' :

$$\widehat{EA'F} = 2 . \widehat{ABE} , \quad \text{donc} \quad \widehat{ELF} = \widehat{EA'F} ,$$

ce qui montre bien que le point L est sur le cercle A' B' C'.

Je démontrerai ensuite que si le même point L est à l'intérieur de l'angle EPF, il sera aussi à l'intérieur de l'angle YPZ ; donc $\widehat{YLZ}$ $=$ [angle inscrit dans seg. PRY $+$ angle inscrit dans seg. PQZ] $= \widehat{YCI} + \widehat{XBI} = \widehat{YXI} + \widehat{ZXI} = \widehat{YXZ}$.

Le point L est donc aussi sur le cercle XYZ.

Enfin, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ qui ont un point commun L, comme on vient de voir, se toucheront en ce même point.

En effet, soient N le centre du cercle A′ B′ C′ et O celui du cercle PYR c'est-à-dire le point milieu de YM ; je joins chacun de ces points aux points E et L, j'aurai :

$$\widehat{OEM} = \widehat{OME} \ , \quad \text{OM est parallèle à IB} \ ,$$

donc

$$\widehat{OEB} = \widehat{IBE} \quad \text{et} \quad \widehat{IBE} = \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{A}) \ ,$$

mais

$$\widehat{C} = \widehat{AB'C'} \ , \quad \widehat{A} = \widehat{B'EC'} \ ,$$

par suite

$$\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\,\widehat{B'C'E} = \frac{1}{2}\,\widehat{NEB} \ .$$

Donc, la droite OE divise l'angle NEB en deux parties égales et on a la suite d'égalités :

$$\widehat{NLO} = \widehat{NEO} = \widehat{OEB} = \widehat{IBE} = \widehat{IYO} = \widehat{ILO} \ .$$

La dernière égalité $\widehat{NLO} = \widehat{ILO}$ qui montre que les trois points N, I, L sont en ligne droite prouve en même temps que les deux cercles A′B′C′, XYZ sont bien tangents au point L.

Je viens de démontrer le théorème dans le cas du cercle inscrit, en supposant que l'angle A soit plus petit que les angles B et C. Mais, en supprimant cette hypothèse et en prenant pour cercle XYZ le cercle exinscrit, on pourra faire la démonstration d'une façon presque entièrement analogue ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Les trois cercles QXR, RYP, PZQ se coupent en un même point.

3e Démonstration.

III. — Soient D, E, F les pieds des perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C du triangle aux côtés opposés (fig. 2).

Prenons sur le côté AC de l'angle A, AK $=$ AB et appelons J le point de rencontre avec BK de la bissectrice de l'angle A.