NOTE SUR LES USAGES DU PAPIER QUADRILLÉ

Autor(en): **Sainte Laguë, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12772

NOTE SUR LES USAGES DU PAPIER QUADRILLÉ

§ 1. — Applications classiques.

Le papier quadrillé est formé comme on le sait par le tracé de 2 réseaux orthogonaux de parallèles équidistantes. Si l'on prend 2 d'entre elles comme axes de coordonnées et le côté d'un des carrés du quadrillage comme unité de longueur, on peut aisément placer à l'œil un point dont les 2 coordonnées sont connues et cela avec une approximation de un dixième. La plupart des applications du papier quadrillé sont basées sur ce fait. Ce sont donc simplement des constructions de géométrie analytique à 2 dimensions [1].

De ce nombre sont les constructions classiques de courbes données par leurs équations. On a par exemple tracé ci-contre la parabole $y = x^2$ (fig. 1), en construisant certains points de coordonnées simples. Les constructions de graphiques ou d'abaques [2] sont également facilitées par l'emploi du papier quadrillé, principalement les constructions de graphiques dans lesquelles une des variables ne prend que des valeurs entières. (Statistiques annuelles, mensuelles, etc...)

Dans la construction des courbes algébriques, il est souvent avantageux, au lieu de chercher les coordonnées exactes des points de la courbe, de chercher à placer par rapport à la courbe des points voisins et dont les 2 coordonnées soient entières de façon à avoir des calculs simples. Si, par exemple [3],

[1] Les dimensions les plus habituelles du papier quadrillé sont voisines de $1/2$ cm. On trouve suivant les marques : 0,491 cm., 0,493 cm., 0,496 cm., 0,499 cm., 0,535 cm., etc. Il y a d'ailleurs des quadrillages plus serrés : 0,396 cm., etc., ou plus larges, 0,789 cm. Il existe enfin pour les constructions plus précises du papier dit millimétrique bien connu des physiciens et dont nous n'aurons pas l'occasion de parler ci-dessus.

Note de la Rédaction. — L'usage du papier millimétrique s'est également répandu dans les sections scientifiques des établissements secondaires. Il est indispensable à la résolution graphique des équations.

[2] *Nomographie* de M. M. d'OCAGNE.

[3] Le lecteur est prié ici, comme dans toute la suite de la Note, de vouloir bien refaire au fur et à mesure les diverses figures sur du papier quadrillé.

on veut construire le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 15xy = 0$ il sera commode de remarquer (fig. 2) que les points A et B sont à l'intérieur de la boucle et CDEFGH sont à l'extérieur, tous ces points étant d'ailleurs très voisins de la courbe. Ce dernier procédé, appliqué avec un peu d'habileté, est certainement le plus rapide pour la construction des courbes.

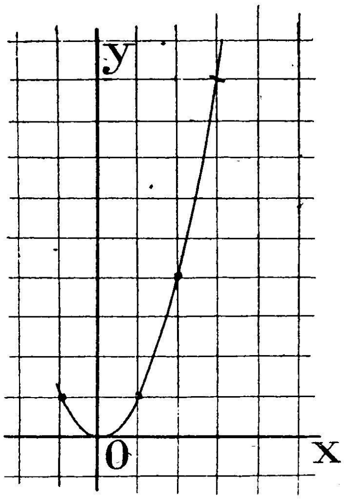

Fig. 1.

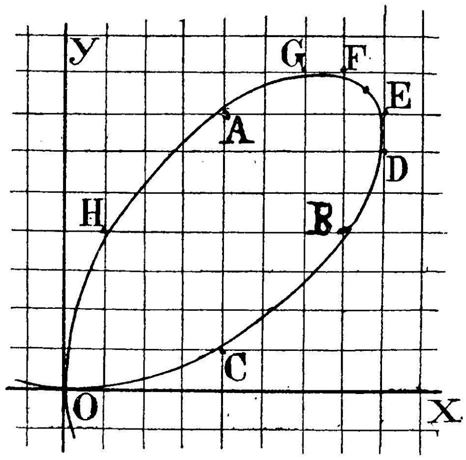

Fig. 2.

La résolution des équations par des intersections de courbes est une application bien connue des tracés graphiques. Par exemple, pour résoudre une équation de la forme $x^2 + px + q = 0$, on construira une fois pour toutes la parabole $y = x^2$ avec grand soin, et on la fera couper par la droite $y + px + q = 0$. Les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées. De même, on résoudra une équation du 3^{me} degré: $x^3 + px + q = 0$ par le tracé d'une parabole cubique $y = x^3$ et d'une droite: $y + px + q = 0$. Sans vouloir insister davantage sur ces exemples classiques, citons cependant comme dernière application à des équations algébriques la résolution de l'équation:

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

par l'intersection de la même parabole cubique $y = x^3$ et de la conique:

$$y^2 + pxy + qy + rx^2 + sx = 0 \ .$$

Le papier quadrillé sert de façon simple à l'évaluation des aires limitées par un contour quelconque. Reprenons par exemple la boucle du folium de Descartes construit précédemment (fig. 3) et prenons pour unité de longueur le double du côté du quadrillage, pour avoir une approximation suffisante, ce qui donne une aire 4 fois plus grande que l'aire demandée. Traçons 2 contours polygonaux utilisant uniquement des lignes du quadrillage et aussi voisins que possible de la courbe donnée et comptons le nombre des carrés contenus dans chaque polygone. Nous aurons ainsi l'aire de chacun d'eux et il suffira d'en prendre la demi-somme pour avoir approximativement l'aire cherchée. Ici, on pourra par exemple

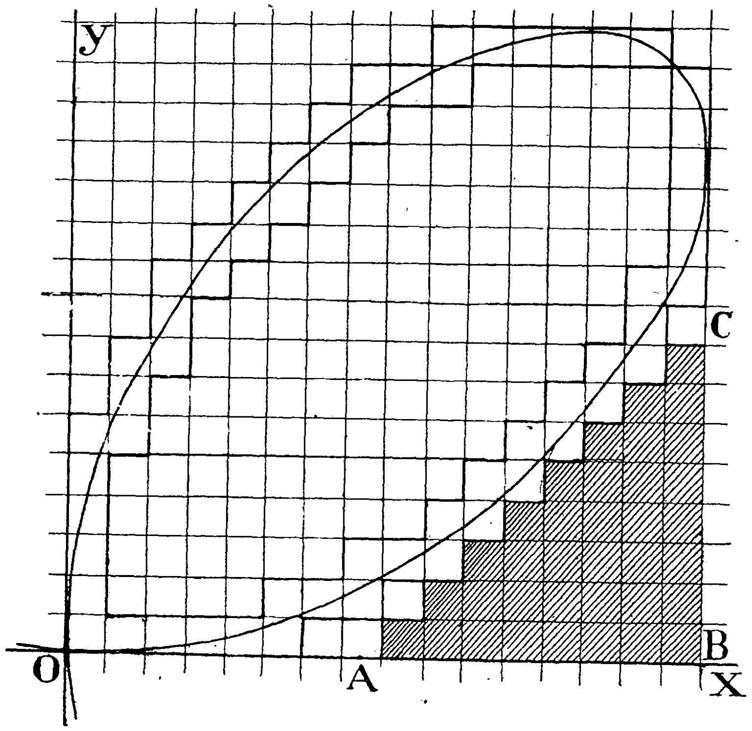

Fig. 3.

remarquer que le polygone recouvert de hachures a une aire égale à $\frac{8 . 9}{2}$. On trouve ainsi que l'aire du polygone qui suit extérieurement la courbe est 175, l'unité d'aire étant la surface de l'un des carrés. Pour avoir la demi-somme cherchée, il suffit de compter le nombre des carrés compris entre les 2 polygones, en comptant 2 carrés pour un, de façon à avoir la moitié de cette aire. On trouve ainsi $29\frac{1}{2}$ et par suite, pour l'aire cherchée, $145\frac{1}{2}$. Il est d'ailleurs plus avantageux de compter le nombre de carrés qui existent entre l'un des 2 polygones et la courbe même, en estimant à l'œil les fractions de carrés, mais ce procédé demande une certaine habitude. Remarquons que ici l'aire considérée est exactement 150.

§ 2. — Points entiers.

Nous appellerons pour abréger *point entier du plan* tout point dont les deux coordonnées sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et point commensurable tout point dont les 2 coordonnées sont des nombres commensurables, l'unité de longueur étant le côté du carré qui sert de base au quadrillage et les axes de coordonnées étant 2 perpendiculaires du quadrillage. Nous nous occuperons presque exclusivement des points entiers. Nous allons voir comment la considération de tels points facilite la construction d'un grand nombre de figures planes, en étudiant auparavant les propriétés les plus élémentaires des droites passant par des points à coordonnées commensurables.

Remarquons d'abord que, étant donné n points commensurables, on peut toujours, avec un rapport d'homothétie convenable, les rendre entiers, en prenant un côté de quadrillage assez petit. Aussi suffira-t-il de prouver, dans certains cas, l'existence de points commensurables répondant à des conditions données, pour en déduire l'existence de points entiers répondant aux mêmes conditions.

Au point de vue qui nous occupe les droites du plan peuvent être rangées en plusieurs catégories : 1° les droites qui ne contiennent aucun point commensurable. Ex. : $x = \sqrt{3}$. 2° les droites qui contiennent un point et un seul à coordonnées commensurables. Ex. : $y = x\sqrt{3}$. 3° les droites qui contiennent 2 et par suite une infinité de points à coordonnées commensurables. Nous supposerons d'ailleurs qu'il y ait au moins un de ces points à coordonnées entières. Il est alors visible qu'une telle droite contient une infinité de points à coordonnées entières. Si, en effet, nous supposons que le point entier de cette droite soit l'origine, et le point commensurable le point $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ le point entier *ad*, *bc* fait partie de la même droite et par suite les points *m. ad*, *m. bc* en font également partie. On verrait aisément qu'il y a sur une telle droite 2 points tels que A, B par exemple (fig. 4) qui sont entiers et à la distance minima, tout autre point entier de la droite étant à une distance de A représentée par m. AB [m étant un entier positif ou négatif]. Il est souvent commode de définir une droite telle que celle-ci par un point entier, A, par exemple, et par les coordonnées a, b du point B voisin par rapport à A, pris pour origine ; a et b sont donc des nombres premiers entre eux et $\frac{b}{a}$ est le coefficient angulaire de la droite. Les droites que nous aurons à considérer seront le plus souvent définies ainsi. Par exemple la droite de la figure précédente est la droite A (3, I).

On voit que 2 droites A(a, b) et A($-a$, $-b$) sont identiques. Si l'on change le signe d'un des 2 nombres a ou b,

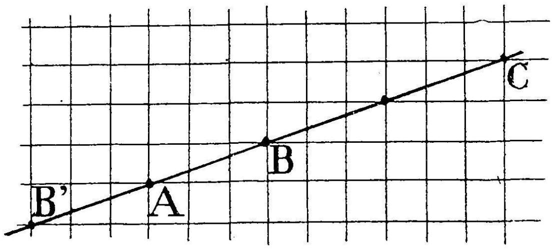

Fig. 4.

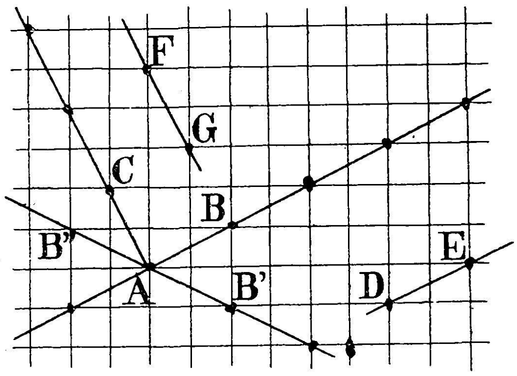

Fig. 5.

et d'un seulement, on obtient une droite symétrique de la première par rapport à l'un des axes de coordonnées. Exemple : AB : AB″ etc... (fig. 5). Il est facile de voir que la droite A($-b$, a), ici AC, est perpendiculaire sur AB.

Ce qui précède donne immédiatement la solution des 2 problèmes suivants : *Mener par un point entier une parallèle ou une perpendiculaire à une droite donnée.* On a par exemple, sur la figure, mené par D la parallèle DE à AB, et par F la perpendiculaire FG à AB.

Nous allons généraliser ceci en considérant des quadrillages à bases différentes. Nous appelons base d'un quadrillage, un quelconque des segments tels que AM (fig. 6) qui sert de côté à un des carrés du quadrillage, et qui représente la distance de 2 parallèles voisines. Considérons maintenant le quadrillage ayant pour base un segment quelconque AB, dont les deux extrémités sont entières, c'est-à-dire le quadrillage tracé en pointillé. On voit que tous les points entiers, ou si l'on veut tous les sommets du nouveau quadrillage, sont des sommets de l'ancien, mais que la réciproque n'est pas vraie. On peut montrer que tout point commensurable de l'un des quadrillages est un point commensurable de l'autre. Nous nous contenterons de l'établir sur un cas particulier en considérant par exemple le point entier α du premier quadrillage et montrant qu'il est commensurable dans le second. Le lecteur généralisera sans peine cette démonstration : AB est partagé par les verticales du premier quadrillage en un nombre entier de segments égaux : ici 2 : AN et NB. Les coordonnées de N sont donc commensurables, dans le quadrillage de base AB. Il en sera de même pour les coordonnées de P où la verticale de α coupe BK. D'ailleurs ici P est entier dans le nouveau quadrillage. Dans ce nouveau quadrillage, α partage dans un rapport commensurable le segment P à extrémités commensurables. Il a donc des coordonnées commensurables.

Remarquons que malgré la propriété qui précède, les longueurs AM et AB qui servent de bases aux deux quadrillages peuvent être incommensurables. C'est d'ailleurs le cas ici :

$$AB = AM\sqrt{5}\ .$$

La considération de quadrillages à bases différentes va nous permettre de résoudre le problème suivant : *Mener par un point entier une droite faisant avec une droite donnée un angle* V, *tel que* tg V *soit commensurable.* [Il sera dans la pratique commode de définir par exemple l'angle V par l'angle d'une droite quelconque AP avec une horizontale AH du quadrillage (fig. 7)]. La direction AP est ici définie par les coordonnées 3, 2 du point P. Soit AB la droite donnée et M le point par lequel doit être menée la droite cherchée. Construisons le quadrillage de base AB et soit N le point de ce quadrillage de coordonnées 3, 2. On voit immédiatement que la droite cherchée est la parallèle MM' menée par M à AN.

Un cas particulier assez intéressant de ce qui précède est le suivant: Mener par un point une droite faisant 45° avec une droite donnée. Exemple. Les deux directions 2, 1 et 1, 3 font 45°. (CD et CE). Les exemples qui précèdent et que l'on pourra généraliser aisément montrent comment il est possible d'effectuer un grand nombre de constructions sur papier quadrillé. La seule précaution à prendre est de profiter de l'arbitraire, qui existe habituellement sur le choix des données, pour introduire le plus grand nombre possible de points entiers dans l'énoncé. On arrive ainsi à vérifier rapi-

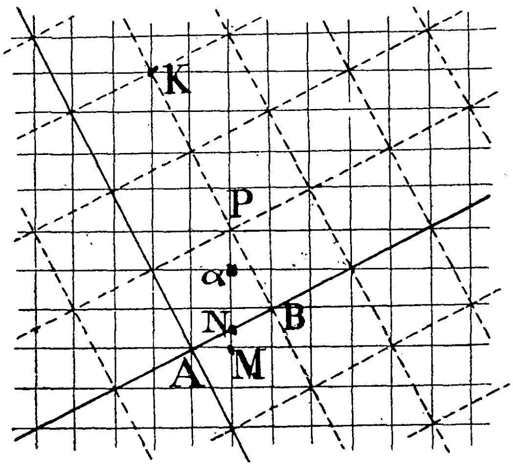

Fig. 6.

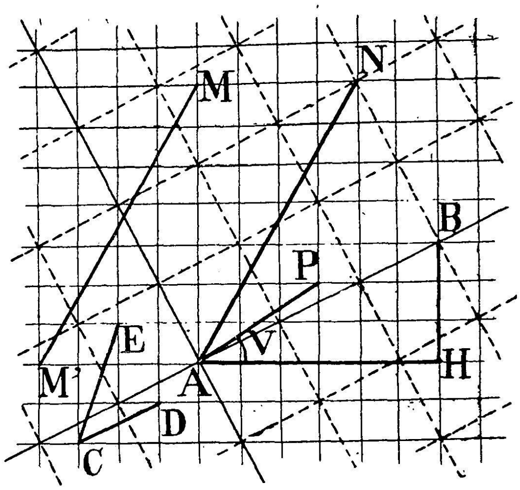

Fig. 7.

dement des énoncés compliqués de géométrie. Malheureusement toutes les figures ne se prêtent pas à de pareilles constructions. Par exemple il est impossible de construire un triangle équilatéral dont les 3 sommets soient entiers (car si ceci avait lieu la tangente trigonométrique de l'angle de 2 côtés serait commensurable). Les courbes quelconques contiennent rarement des points entiers. Signalons comme cas simple souvent utilisé le cercle dont le centre est un point entier et de rayon 5, cercle qui contient 12 points entiers[1].

Nous ne continuerons pas davantage la théorie des points entiers, nous contentant d'énumérer quelques résultats particuliers faciles à établir :

---

[1] Le triangle dont les sommets ont pour coordonnées 10, 0 ; 0, 10 ; —6, —8 a en particulier les pieds des hauteurs, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et du cercle des 9 points, les milieux des côtés qui sont des points entiers. Le point de Lemoine et le centre de gravité sont commensurables et deviendraient entiers par une homothétie convenable.

L'aire d'un polygone dont les sommets sont des points entiers est représentée par un nombre entier ou par la moitié d'un nombre entier (l'unité d'aire étant l'aire du carré de base du quadrillage).

Le lieu des points du plan équidistants de 2 points entiers ne contient des points entiers que si les 2 points donnés sont de même parité, c'est-à-dire si les 2 coordonnées de l'un des 2 points par rapport à l'autre, sont de même parité.

Un cercle défini par 3 points commensurables contient une infinité de points commensurables. En particulier, il est coupé en un point commensurable, par toute droite à coefficient angulaire commensurable, qui passe par un point commensurable de ce cercle.

La distance d'un point commensurable à une droite, définie par 2 points commensurables, n'est commensurable que s'il existe sur la droite 2 points commensurables à distance commensurable. Pour préciser ceci, remarquons que en général cela n'a pas lieu pour une droite quelconque. Ceci aurait lieu par exemple pour une droite de direction 3, 4 car $3^2 + 4^2 = 5^2$. Si maintenant on prend une droite quelconque, et par exemple 2 points entiers consécutifs A et B sur cette droite, à une distance δ (δ étant en général incommensurable) on peut évaluer aisément la distance d'un point quelconque M (fig. 8) à AB. d étant cette distance, $d \cdot \delta$ est un nombre entier (double de l'aire MAB) ici 7. Donc d est le quotient par δ de cet entier; ici $d = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Dans tout ce qui précède, nous avons laissé systématiquement de côté une notion qui se rattache simplement à celle des points entiers : la notion d'entiers imaginaires [1]. On appelle ainsi tout nombre $a + bi$ dans lequel a et b sont des entiers positifs ou négatifs, i ayant la signification connue : ($i^2 = -1$). Les affixes de ces nombres sont tous les points entiers du plan. Nous ne traiterons pas cette question nous bornant à citer un seul théorème qui concerne les quadrillages de bases différentes :

Les affixes des multiples, réels ou imaginaires, d'un nom-

[1] *Théorie des Nombres* de M. CAHEN.

bre, réel ou imaginaire, a, *sont les sommets d'un quadrillage ayant pour base le segment OA qui joint l'origine au point A, affixe de* a.

§ 3. — **Applications diverses des propriétés des points entiers.**

Les applications à l'arithmétique de la théorie des points entiers sont très nombreuses. Nous serons obligés de faire un choix parmi elles, et de donner simplement quelques exemples de ces diverses applications.

Etant donné la courbe $f(x, y) = 0$ ou plus généralement $f(x, y, a) = 0$ représentée par une équation homogène, a désignant par exemple une longueur de la figure, tout point

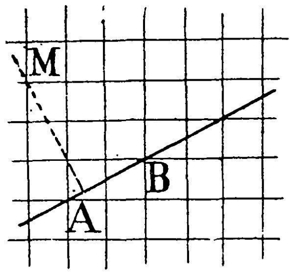

Fig. 8.

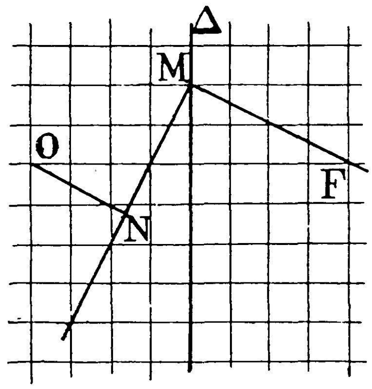

Fig. 9.

entier de cette courbe donnera une solution en nombres entiers de l'équation $f(x, y, a) = 0$. Un point commensurable de coordonnées $\frac{x}{k}$, $\frac{y}{k}$ donnera une solution en nombres entiers de $f(x, y, ka) = 0$. Citons un exemple de ce genre d'applications: Prenons une droite fixe Δ qui sera une ligne verticale du quadrillage et 2 points O et F, symétriques par rapport à Δ, et entiers. Prenons un point M commensurable variable sur Δ, menons MN, perpendiculaire en M à FM, (fig. 9) et abaissons enfin ON perpendiculaire sur MN. Il est facile de voir que les coordonnées de N sont commensurables. Le lieu de ce point est d'ailleurs une strophoïde. On aura donc des solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x^2 + y^2) = ka(x^2 - y^2) .$$

La plupart de ces applications concernent le carré de la distance de 2 points entiers, nombre qui est un entier, somme de deux carrés. Prenons par exemple la parabole $y^2 = 4\,px$, p étant un nombre entier. On aura des points entiers de cette parabole en posant $y = 2mp$ et par suite $x = m^2p$. Soit F le foyer de cette parabole (fig. 10), Δ sa directrice, et M un point entier de cette conique. On a $\overline{MF}^2 = \overline{MN}^2$ qui donne une solution en nombres entiers de $a^2 = b^2 + c^2$, car $\overline{MF}^2$ est une somme de 2 carrés. Dans le

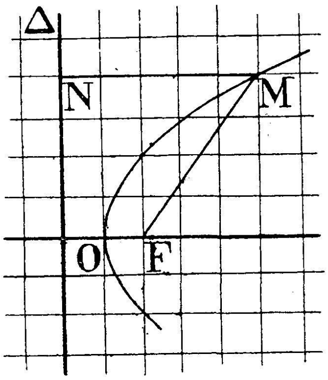

Fig. 10.

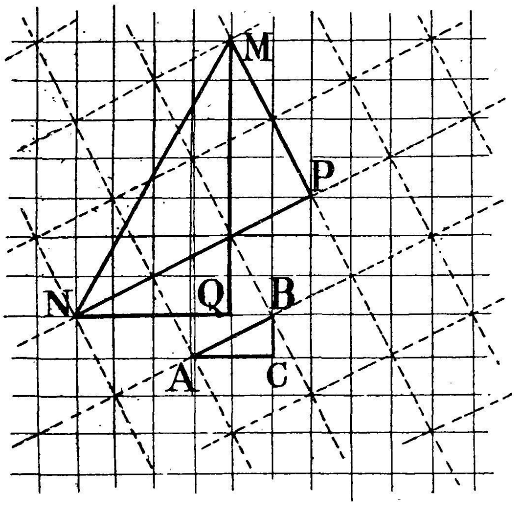

Fig. 11.

cas de la figure on a : $p = I$, $x = 4$, $y = 4$ d'où l'égalité : $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Prenons 2 points M et N (fig. 11) sommets d'un quadrillage de base AB. Le carré de leur distance est le produit par $\overline{AB}^2$ d'une somme de 2 carrés, ici 3^2 et 2^2 car NP $= 3$. AB et MP $= 2$. AB. Mais d'autre part le carré de cette distance est la somme des carrés de MQ et NQ. Si l'on remarque enfin que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, on voit que l'on a démontré le théorème :

Le produit d'une somme de 2 carrés par une somme de 2 carrés est encore une somme de 2 carrés.

Dans le cas de la figure on a : $7^2 + 4^2 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$

La considération des points entiers, équidistants de 2 points entiers donnés, montrerait qu'un nombre peut être de plusieurs façons une somme de 2 carrés. Nous allons étendre ceci à une somme de 4 carrés. Prenons 2 couples de points diamétralement opposés dans un même cercle AB et

CD (fig. 12). On peut par exemple les obtenir en prenant à l'aide de quadrillages de base arbitraire un rectangle quelconque : ici le rectangle 2,1 du quadrillage de base 3,1. Soit M un point entier quelconque du plan. L'égalité connue :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$$

montre qu'un nombre peut s'écrire de plusieurs façons sous forme d'une somme de 4 carrés, car chaque terme, tel que $\overline{MA}^2$, est une somme de 2 carrés. On a ici l'égalité : $1^2 + 6^2$

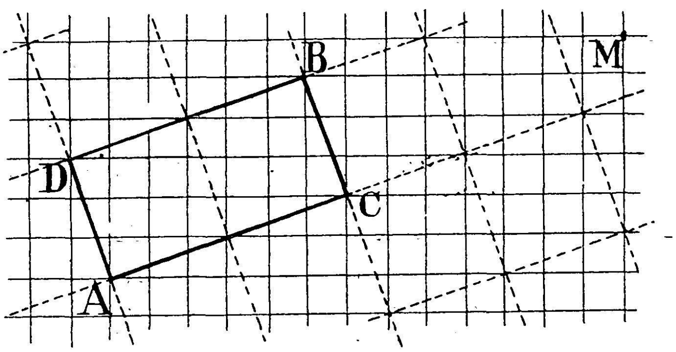

Fig. 12.

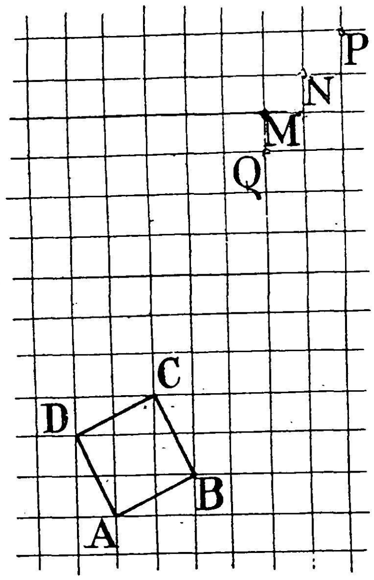

Fig. 13.

$+ 8^2 + 13^2 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 14^2$. Cette représentation des sommes de 4 carrés permet de résoudre diverses questions. Par exemple si l'on veut trouver 2 sommes de 4 carrés égales et portant sur 8 entiers consécutifs on voit qu'il suffira de partir du carré ABCD (fig. 13). Les points M, N, P, etc... répondent à la question. On a pour le point M : $2^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2$. Si l'on prend un point tel que Q pour lequel un même carré se retrouve dans les deux membres on aura des égalités concernant les sommes de 3 carrés. Ici : $2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$ [1].

[1] On obtiendrait de pareilles égalités en considérant le quadrillage « cubique » des points entiers de l'espace : le plan, lieu des points équidistants de 2 points donnés, contient parfois des points entiers pour lesquels on a des sommes de 3 carrés. On peut étendre certaines des propriétés du plan à de tels points entiers mais non toutes. En particulier la représentation par imaginaires du plan ne se retrouve pas dans l'espace. Signalons encore l'impossibilité d'obtenir des quadrillages « cubiques » à bases différentes, si l'on veut que les 3 directions d'un tel quadrillage soient distinctes de celles du premier.

§ 4. — Applications diverses du papier quadrillé.

On peut employer le papier quadrillé pour étudier commodément certaines questions. Quelques dessins industriels (canevas, dallages, carrelages...) utilisent le carré du quadrillage comme point, pour tracer de façon grossière certaines courbes. En géographie on peut citer la méthode « des carreaux » pour l'agrandissement des cartes (Un procédé analogue permettrait de tracer des projections homographiques d'une figure donnée. Par exemple, une amplification d'ordonnée dans le rapport 2, fera correspondre à un carré de la première figure 2 carrés superposés de la seconde, etc...). On peut encore se servir du papier quadrillé pour étudier

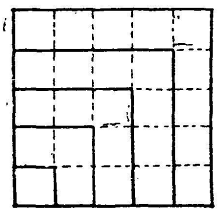

Fig. 14.

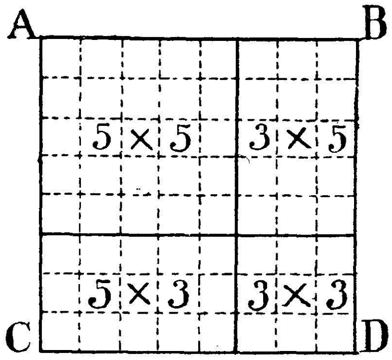

Fig. 15.

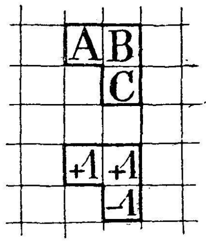

Fig. 16.

les propriétés des déterminants, des carrés magiques, du triangle arithmétique de Pascal, les mouvements des pièces d'un échiquier, etc.. ou encore pour établir certains théorèmes d'arithmétique : Exemple : *La somme des* n *premiers nombres impairs est* n^2. Dans la figure (fig. 14) les polygones successifs contiennent un nombre impair de carrés et l'on voit ainsi que la somme des 5 premiers impairs est 5^2.

Le carré de la somme de 2 nombres entiers a *et* b *est égal à la somme des carrés des 2 nombres augmentée du double produit de ces nombres*. On voit (fig. 15) que si l'on prend $a = 5$ et $b = 3$ le carré ABCD est formé de 4 parties qui contiennent respectivement 5×5 ; 3×5 ; 5×3 ; 3×3 carrés, ce qui donne la propriété.

Donnons un exemple plus compliqué de ces démonstrations figurées. Supposons que toutes les cases d'un quadrillage contiennent des entiers tels, que la somme des nombres de cases horizontales donne le nombre situé au-dessous de la seconde : les 3 nombres A, B, C (fig. 16) donnent $A + B - C = O$ (Le lecteur fera sans peine des applications de ceci au cas du triangle arithmétique de Pascal). Représentons encore ceci par les coefficients 1, 1 et — 1 mis sur les 3 cases considérées (Sur la figure on a pris 3 nouvelles

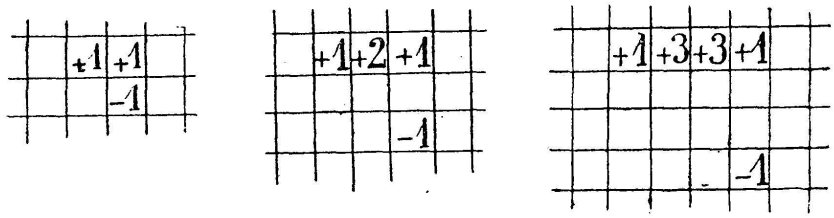

Fig. 17.

cases au-dessous des premières). Ceci posé, en n'introduisant ainsi que des totaux nuls on pourra affecter certaines cases de coefficients, toutes les cases marquées donnant un total égal à 0. Par exemple, sur la figure 17, les diverses parties de la figure répondent à cette condition et l'on voit aisément apparaître les coefficients du binome. Ne voulant pas allonger outre mesure cette Note nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème correspondant et d'en déduire des propriétés du triangle de Pascal [1].

A. Sainte Laguë (Douai).

[1] Le lecteur trouvera un très grand nombre de ces démonstrations figurées dans la *Théorie des Nombres* de Lucas.