EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

Autor(en): **Aubry, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12787

EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

1. Soit à déterminer le reste de la division de a^m par le nombre premier p, m étant égal à $\frac{p-1}{2}$. Pour les cas de $a = 1, 2, 3, \ldots p-1, p-2, p-3, \ldots$ on peut y arriver directement[1]; la théorie qui va être exposée permet d'y arriver généralement et de la manière la plus simple.

2. *Si* r, r′, r″, ... *désignent les restes de la division par* b *des nombres* a, a′, a″, ... *les deux produits* rr′r″ ... *et* aa′a″ ... *divisés par* b *donnent le même reste.*

3. *On a :*

$$(1) \qquad (a+c)^k \equiv a^k \pmod{c}$$

car $(a+c)^k - a^k$ est divisible par $(a+c) - a = c$.

De même

$$(2) \qquad (c-a)^k \equiv \pm a^k \pmod{c}$$

selon que k est pair ou impair.

4. b *désignant un nombre impair premier avec* a, *et* $E\omega$ *désignant la partie entière du nombre non entier* ω ; *posons*

$$f(a, b) = \mathrm{E}\frac{a}{b} + \mathrm{E}\frac{2a}{b} + \mathrm{E}\frac{3a}{b} + \ldots + \mathrm{E}\frac{\beta a}{b}, \quad \left(\beta = \frac{b-1}{2}\right)$$

on aura :

$$(3) \qquad f(1, b) = 0$$

$$(4) \qquad f(a+b, b) = \left(1 + \mathrm{E}\frac{a}{b}\right) + \left(2 + \mathrm{E}\frac{2a}{b}\right) + \ldots + \left(\beta + \mathrm{E}\frac{\beta a}{b}\right)$$

$$= \frac{b^2-1}{8} + f(a, b). \qquad \text{(Tchébichef)}$$

[1] Voir *Ens. math.*, 1907, p. 28. On a encore un cas de ce genre, quand p est de la forme $a^k \pm 1$, comme 3, 5, 17. 31, 37, 101, 127, 197, 257, ... ce cas est du reste aisé à traiter.

5. *Soit* $a < b$; *les* $E\frac{b}{a}$ *premiers termes de* $f(a, b)$ *sont tous nuls ; les suivants, jusqu'au* $\left(E\frac{2b}{a}\right)^{ème}$, *sont tous égaux à* 1 ; *les suivants, jusqu'au* $\left(E\frac{3b}{a}\right)^{ème}$, *tous égaux à* 2 ; *etc.* (Gauss.) En effet, on a :

$$0 < \frac{kb}{a} - E\frac{kb}{a} < 1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{a}{b}E\frac{kb}{a} < k < \frac{a}{b}\left(1 + E\frac{kb}{a}\right) ;$$

donc les nombres 1, 2, 3, ... se trouvent respectivement entre les $\left(E\frac{b}{a}\right)^{ème}$, $\left(E\frac{2b}{a}\right)^{ème}$, $\left(E\frac{3b}{a}\right)^{ème}$, ... termes de la série $\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{b}$, $\frac{3a}{b}$, ... et ceux qui les suivent immédiatement.

Les $\left(E\frac{b}{a}\right)$ premiers multiples de $\frac{a}{b}$ sont ainsi < 1, et leur partie entière est 0. Les $\left(E\frac{2b}{a} - E\frac{b}{a}\right)$ suivants ont des valeurs comprises entre 1 et 2 ; leur partie entière est donc 1. Les $\left(E\frac{3b}{a} - E\frac{2b}{a}\right)$ suivants ont une valeur comprise entre 2 et 3 ; leur partie entière est donc 2. Et ainsi de suite.

6. *On a, en posant* $\alpha = \frac{a-1}{2}$, $\beta = \frac{b-1}{2}$,

$$f(a, b) + f(b, a) = \alpha\beta . \tag{5}$$ (Gauss)

D'après **5**, $f(a, b)$ a pour valeur

$$(\alpha)\quad \begin{cases} 0\left(E\frac{b}{a}\right) + 1\left(E\frac{2b}{a} - E\frac{b}{a}\right) + 2\left(E\frac{3b}{a} - E\frac{2b}{a}\right) + 3\left(E\frac{4b}{a} - E\frac{3b}{a}\right) + \dots \\ \qquad + \frac{a-3}{2}\left(E\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} - E\frac{a-3}{2}\frac{b}{a}\right) + \alpha\left(\beta - E\frac{\alpha b}{a}\right) . \end{cases}$$

Le dernier groupe, au lieu d'aller du $\left(E\frac{\alpha b}{a}\right)^{ème}$ terme de $f(a, b)$ au $\left(E\frac{a+1}{2}\frac{b}{a}\right)^{ème}$, s'arrête au $\beta^{ème}$, d'après l'expression même de $f(a, b)$: or ce dernier terme fait partie du groupe en question, car

$$E\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{b-1}{2} \leq E\frac{a+1}{2}\frac{b}{a} ,$$

et, en effet,

$$\mathrm{E}\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{b-1}{2} < \frac{b+1}{2} + \mathrm{E}\frac{b-a}{2a} = \mathrm{E}\frac{a+1}{2}\frac{b}{a}$$

(α) se réduit donc bien à (5).

7. Théorème. p *désignant un nombre premier égal à* $2m+1$, *et* a, *un nombre non divisible par* p, *on aura :*

$$a^m \equiv (-1)^{f(a,\,p)} \quad [1] \qquad \text{(Gauss)} \tag{6}$$

Démonstration de Tchébichef. Posons

$$4r_n = p + \left(4n - p - 2p\mathrm{E}\frac{2n}{p}\right)(-1)^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}}.$$

Selon que $\mathrm{E}\frac{2n}{p}$ est pair ou impair, r_n prend l'une ou l'autre des valeurs

$$n - \frac{p}{2}\mathrm{E}\frac{2n}{p}, \quad -n + \frac{p}{2}\left(1 + \mathrm{E}\frac{2n}{p}\right),$$

toutes deux entières et comprises entre 0 et $\frac{p}{2}$ [2]. De plus, on peut écrire

$$r_n \equiv n(-1)^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}}.$$

On tire de là

$$r_a r_{2a} r_{3a} \dots r_{ma} \equiv a^m m!\,(-1)^{f(2a,\,p)}. \tag{7}$$

On ne peut supposer $r_{ka} \equiv r_{la}$, car il s'ensuivrait $a(k \pm l) \equiv 0$, ce qui est impossible, puisque k et l sont $< \frac{p}{2}$ et que a est premier avec p. Par conséquent, les facteurs du premier membre de (7), qui sont d'ailleurs compris entre 0 et $\frac{p}{2}$, ne

[1] Pour abréger, on sous-entend l'indication (mod p), quand le module est le nombre premier indéterminé p.

[2] En effet, on a

$$0 < \frac{2n}{p} - \mathrm{E}\frac{2n}{p} < 1, \quad \text{d'où} \quad 0 < n - \frac{p}{2}\mathrm{E}\frac{2n}{p} < \frac{p}{2},$$

et

$$0 < 1 - \frac{2n}{p} + \mathrm{E}\frac{2n}{p} < 1, \quad \text{d'où} \quad 0 < \frac{p}{2}\left(1 + \mathrm{E}\frac{2n}{p}\right) - n < \frac{p}{2}.$$

sont autres que les nombres 1, 2, 3, ... m, dans un certain ordre, et (7) peut se simplifier ainsi :

$$(8) \qquad 1 \equiv a^m (-1)^{f(2a,\,p)} \quad \text{ou} \quad a^m \equiv (-1)^{f(2a,\,p)} ,$$

ou encore, d'après (1), (8) et (4),

$$(9) \qquad a^m \equiv 2^m \left(\frac{a+p}{2}\right)^m \equiv 2^m (-1)^{f(a+p,\,p)} = 2^m (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + f(a,\,p)} .$$

Pour $a = 1$, on a, à cause de (3)

$$(10) \qquad 1 \equiv 2^m (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \quad \text{d'où} \quad 2^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} ,$$

et de là, la relation (6).

A titre d'application, soit à trouver le reste de la division de 5^8 par 17 ; on a

$$\mathrm{E}\frac{5}{17} + \mathrm{E}\frac{10}{17} + \ldots + \mathrm{E}\frac{40}{17} = 7 , \quad \text{nombre impair ;}$$

on a donc $5^8 \equiv -1 \pmod{17}$.

Cor. I. On a donc toujours cette remarquable relation

$$(11) \qquad a^m \equiv \pm 1 .$$

Désignons par le *symbole de Legendre*, $\left(\frac{a}{p}\right)$, qui s'énonce *caractère quadratique* de a relativement à p, le reste de la division de a^m par p ; (11) s'écrira ainsi

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 ,$$

selon que le nombre $f(a, p)$ est pair ou impair. Dans le premier cas, a est un *résidu* de p, et dans le second, c'en est un *non-résidu*.

II. Théorème de Fermat. De (11) on tire, en élevant au

carré, la relation suivante

$$a^{p-1} \equiv 1 \ . \quad (12)$$ [1]

III. La formule (10) montre que $\left(\frac{2}{p}\right)$ *a pour valeur* 1 *quand* p *est de l'une des formes* 8 ± 1, *et* -1, *quand il est de l'une des formes* 8 ± 3.

IV. D'après (1), si $a \equiv b$, on a :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) . \quad (13)$$

V. D'après (11), si $\left(\frac{ab}{p}\right) = 1$, on a $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

VI. D'après 2, on a :

$$\left(\frac{abc \ldots}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \ldots \quad (14)$$

---

[1] Les deux démonstrations suivantes figurent-elles parmi celles assez nombreuses qu'on a données de ce célèbre théorème. A vrai dire, elles ne sont que des variantes de démonstrations connues ?

1° a et b désignant deux entiers $< p$, formons le cycle de congruences $ab \equiv c$, $ac \equiv d$, $ad \equiv e$, ... $ak \equiv l$, $al \equiv b$, qui se trouve en contenir un nombre $n \leq p-1$. Soit b' un nombre non compris dans la suite $b, c, d, \ldots k, l$; on aura ces n' congruences $ab' \equiv c'$, $ac' \equiv d'$, ... $af' \equiv g'$, $ag' \equiv b'$, et les n' nombres $b', c', \ldots g'$ seront différents des n premiers, autrement ils reproduiraient le premier cycle.

Soit b'' un nombre non compris dans les $n + n'$ premiers, on aura ces n'' nouvelles congruences $ab'' \equiv c''$, ... $ad'' \equiv e''$, $ae'' \equiv b''$.

Continuant ainsi, on épuisera toute la série des $p-1$ premiers entiers; et multipliant ces congruences, on aura

$$a^{n+n'+\cdots} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \ .$$

2° Aucun des p produits $a^{p-1}, a^{p-2}b, a^{p-3}b^2, \ldots a^2 b^{p-3}, ab^{p-2}, b^{p-1}$ n'est $\equiv 0$; il y en a donc au moins deux congrus entre eux. Soit

$$a^{k-1}b^{p-k} \equiv a^{k-1+h}b^{p-k-h}, \quad \text{d'où} \quad a^h \equiv b^h ;$$

on voit qu'on peut toujours écrire

$$a^x \equiv b^x , \quad b^y \equiv 1 , \quad \text{et de là} \quad az \equiv b \quad (x, y \text{ et } z < p)$$

en posant $a^{x-1}b^{y+1-x} \equiv z$. Il est donc permis de poser

$$az_1 \equiv 1 , \quad az_2 \equiv 2 , \quad az_3 \equiv 3 , \ldots az_{p-1} \equiv p-1 ,$$

les nombres $z_1, z_2, \ldots$ étant tous différents, ce qui donne, en multipliant,

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!$$

VII. Puisque $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, on peut écrire :

$$\left(\frac{a^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = 1 .$$

Donc

$$\left(\frac{a^2 bc \ldots}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \ldots \tag{15}$$

VIII. On a :

$$(p-1)^m \equiv \pm 1 , \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p-1}{p}\right) = \pm 1 , \tag{16}$$

selon que m est pair ou impair (2), c'est-à-dire selon que $p = 4 \pm 1$.

IX. On a :

$$\left(\frac{p-a}{p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)(-1)^m . \tag{17}$$

Ainsi

$$\left(\frac{p-2}{p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^m (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} . \tag{18}$$

8. Théorème. *Désignant par* p *et* q *deux nombres premiers impairs, et par* m *et* n, *les entiers* $\frac{p-1}{2}$ *et* $\frac{q-1}{2}$, *on a :*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{mn} \tag{19}$$ (Legendre)

C'est la conséquence de (5) et de (6), puisqu'on a :

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{f(q,p)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{f(p,q)} . \quad \text{(Gauss)}$$

Ainsi *le caractère de* p *par rapport à* q *est le même que celui de* p *par rapport à* q, *à moins que* p *et* q *ne soient tous deux de la forme* $4 - 1$.

La formule (19) peut aussi s'écrire

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \pm \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^m \qquad (p = 4 \pm 1) . \tag{20}$$

Cor. I. On sait (voir *Ens. math.*, 1907, p, 444, 7 et 228, VI) que si $a^m \equiv 1$, p divise $x^2 - ay^2$. Donc *si* p *et* q *sont de la forme* $4 + 1$ *et que* p *divise* $x^2 + qy^2$, q *divisera* $x^2 + py^2$. En effet, on a

$$\left(\frac{-q}{p}\right) = 1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-p}{q}\right) = 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

II. *Si* p *est de la forme* $4 - 1$ *et* q, *de la forme* $4 + 1$; *si en outre* p *ne divise pas* $x^2 + qy^2$, q *divisera* $x^2 + py^2$. En effet, on a :

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = -1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-q}{p}\right) = 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

III. 1° Soit $q = 3$; on aura, suivant que $p = 4 \pm 1$, ce qui donne $(-1)^m = \pm 1$,

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \pm\left(\frac{p}{3}\right) .$$

En outre, selon que $p = 3 \pm 1$, il viendra

$$\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^m\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^m\left(\frac{\pm 1}{3}\right) = \pm 1 .$$

On a ainsi à examiner les quatre combinaisons 12 ± 1 et 12 ± 5. On trouve immédiatement

$$p = 12 + 1 , \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = 1 , \qquad p = 12 - 1 , \left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = 1$$

$$p = 12 + 5 , \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = -1 , \quad p = 12 - 5 , \left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -1 .$$

Ainsi $p = 12 \pm 1$ est diviseur, et $p = 12 \pm 5$ non diviseur de $x^2 - 3y^2$. On peut ajouter que $p = 12 + 1$ et $12 - 5$ sont diviseurs et $p = 12 + 5$ et $12 - 1$, non diviseurs de $x^2 + 3y^2$.

2° Soit $q = 5$; on aura $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \pm 1$, selon que p sera de l'une des formes 20 ± 1 ou 20 ± 9; ou de l'une des suivantes 20 ± 3, 20 ± 7. De là ce théorème : les nombres premiers 20 ± 1 ou 20 ± 9 sont diviseurs, et les nombres premiers 20 ± 3 ou 20 ± 7, non diviseurs de $x^2 - 5y^2$; les

nombres premiers $20 + 1$, 3, 7, 9 sont diviseurs et les nombres $20 - 9$, -7, -3, -1, non diviseurs de $x^2 + 5y^2$.

3° Soit encore le nombre composé 15, on aura $\left(\frac{15}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$. Combinant les deux formes 12 ± 1 et 20 ± 1, on trouve les formes $60 + 1$, 7, 11, 17, 43, 49, 53, 59, pour les diviseurs de $x^2 - 15y^2$.

4° Soit enfin $q = 20$. On a : $\left(\frac{20}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{2^2}{p}\right)$; on est ramené au cas de 5, et en effet les diviseurs de $x^2 \pm 20y^2$ doivent être cherchés dans ceux de $x^2 \pm 5(2y)^2$.

IV. 1° p *étant* $4 + 1$, *tout diviseur impair* a *de* $u^2 + pv^2$ *ou de* $x^2 + p$ *fournit la relation* $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, *selon que* $a = 4 \pm 1$. En effet a est le produit d'une certaine quantité de facteurs premiers α de forme $4 + 1$ par un nombre pair ou impair de facteurs β de forme $4 - 1$. On a donc

$$\left(\frac{-p}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-p}{\beta}\right) = 1 , \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{p}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{\beta}\right) = -1$$

et de là

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\beta}{p}\right) = -1 , \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

Ainsi r étant un résidu et ρ un non résidu de p, on prendra comme diviseurs de $x^2 + p$, les nombres $4 + 1$ qui sont en même temps $\equiv r$, et les nombres $4 - 1$ qui sont en même temps $\equiv \rho$,

Soit $p = 13$; les résidus étant 1, 3, 4, 9, 10, 12, et les non résidus, 2, 5, 6, 7, 8, 11 ; on prendra d'une part 1, 9, 17, 25, 29, 49, et d'autre part 7, 11, 15, 17, 19, 31, 47, ainsi que les mêmes nombres augmentés de 4 . 13, puisque si n est de la forme 4 ± 1, il en sera de même de $4 + n$. Par conséquent, les diviseurs de $u^2 + 13v^2$ sont de l'une des formes suivantes

$$52 + 1, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 25, 29, 31, 47, 49 .$$

2° p *étant un nombre premier* $4 - 1$, *tout diviseur impair*

de $u^2 + pv^2$ *donne* $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Démonstration et usages analogues (Legendre).

V. *Tout nombre premier* q *compris dans les formes linéaires des diviseurs de* $x^2 + py^2$ *est nécessairement diviseur de cette forme,* p *étant* $4 + 1$. En effet on a :

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1 \text{ , selon que } q = 4 \pm 1$$

d'où

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \pm 1 \text{ .} \qquad \text{(Legendre)}$$

Si $p = 4 - 1$, on a une conclusion analogue, mais il y a deux cas à examiner[1].

VI. L'exemple suivant, de Legendre, fera comprendre la marche à suivre pour déterminer le caractère d'un nombre quelconque, si grand soit-il.

On a successivement :

$$\left(\frac{601}{1013}\right) = \left(\frac{1013}{601}\right) = \left(\frac{103}{601}\right) = \left(\frac{601}{103}\right) = \left(\frac{86}{103}\right) = \left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{43}{103}\right) = \left(\frac{43}{103}\right)$$
$$= -\left(\frac{103}{43}\right) = -\left(\frac{17}{43}\right) = -\left(\frac{43}{17}\right) = -\left(\frac{9}{17}\right) = -\left(\frac{1}{17}\right) = -1 \text{ .}$$

Ainsi 1013 ne divise aucun nombre de la forme $x^2 + 601y^2$.

VII. *Le nombre* 3 *est non résidu de* $p = 2^{2n} + 1$. En effet, $p + 1 = 2(2^{2n-1} + 1)$ est multiple de 3, d'où $p = 3 - 1$ et par suite

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1 \text{ .} \qquad \text{(Tchébichef)}$$

VIII. $p = 2^{4n+1} - 1 = 2(4^n - 1) + 1$ est de la forme $3 + 1$; par suite

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \text{ ;}$$

donc 3 *est non résidu* de p (Ed. Lucas).

---

[1] Voir LEJEUNE-DIRICHLET, *Werke*, I, p. 202 et 226, plusieurs extensions de ces théorèmes.

IX. 3 *est non résidu de* $p = 2^n + 1$ (Ed. Lucas). En effet on a :

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = 1 .$$

(Voir *C. R.*, t. 87, un théorème analogue du P. Pépin.)

9. *Soit* $p = a^2 + b^2$ *un nombre premier* $4\mu + 1 = 2m + 1$, a *impair et* b *pair;* a *est résidu de* p, *et chacun des deux nombres* $a \pm b$ *l'est ou ne l'est pas selon qu'il est* 8 ± 1 *ou* 8 ± 3.

1° Soit α un facteur premier de a ; p est résidu de α ; on a donc :

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right) = 1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Pi\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1 .$$

2° On a : $2p = (a + b)^2 + (a - b)^2$. Soit g un facteur premier du nombre impair $a \pm b$. On peut écrire :

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = 1 , \quad \text{donc} \quad \left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{2}{g}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{g}{p}\right) = \left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{2}{g}\right) = \pm 1$$

selon que g est 8 ± 1 ou 8 ± 3. De là aisément

$$\left(\frac{a \pm b}{p}\right) = (-1)^{\frac{(a \pm b)^2 - 1}{8}} .$$

Cor. On a : $(a + b)^2 \equiv 2ab$, d'où, en élevant à la puissance μ et posant $f \equiv -1$ [1], $b \equiv af$,

$$2^\mu f^\mu \equiv (a + b)^m \equiv (f^2)^{\frac{(a+b)^2 - 1}{8}} = f^{\mu + \frac{ab}{2}}$$

et par suite

$$2^\mu \equiv f^{\frac{ab}{2}} ,$$

comme Gauss l'avait autrement démontré. Ainsi 2 est résidu biquadratique si $b = 8b'$: alors $p = a^2 + 64b'^2$, car dans ce cas, $\frac{ab}{2} = 4ab'$ et $f^4 \equiv 1$ (Lejeune-Dirichlet). Reuschle a donné de même le *caractère octique* de 2 ; et le lieut.-col.

[1] Ce qui est toujours possible si $p = 4 + 1$. (Voir *Ens. math.*, 1907, p. 29.)

Cunningham, son *caractère sextodécimique* (voir le t. XXVII des *Proceed. of the London math. Soc.*, p. 85).

10. *Soit* $p = a^2 + 2b^2$, *un nombre premier* $8 + 1$, b *est résidu de* p. Soient 2, β, β', ... les facteurs premiers de *b*. On a :

$$\left(\frac{p}{\beta}\right) = 1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\beta}{p}\right) = 1 , \quad \text{et comme} \quad \left(\frac{2}{p}\right) = 1 , \quad \left(\frac{b}{p}\right) = 1 .$$

Cor. Soient *g* les facteurs premiers 8 ± 1 du nombre impair *a*, et *h* ses facteurs premiers 8 ± 3. De la relation $2p = 2a^2 + (2b)^2$, on tire

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = \left(\frac{2p}{h}\right) = 1 ;$$

et, comme $\left(\frac{2}{g}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{h}\right) = -1$, il vient

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{h}\right) = -1 , \quad \left(\frac{g}{p}\right) = 1 , \quad \left(\frac{h}{p}\right) = -1 .$$

Donc $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, et par suite a *est ou n'est pas résidu selon que les facteurs* h *sont en nombre pair ou impair, c'est-à-dire selon que* $a = 8 \pm 1$ *ou* 8 ± 3.

Elevons à la puissance paire μ, les deux membres de la congruence $a^2 \equiv 2b^2$ et remarquons que $b^m \equiv 1$, on trouve $2^\mu \equiv a^m$. Ainsi 2 *et* -2 *sont ou ne sont pas résidus biquadratiques selon que* $a^m \equiv \pm 1$, *c'est-à-dire selon que* $a = 8 \pm 1$ *ou* 8 ± 3 (Gauss).

Lejeune-Dirichlet, l'auteur de cette démonstration, en donne plusieurs variantes et extensions, entre autres ce théorème : q *désignant un nombre premier* $4 - 1$, *et* p, *un nombre premier* $4 + 1$, *si* $p = a^2 + qb^2$, q *est résidu biquadratique ou ne l'est pas selon que* a *est résidu ou non résidu de* q.

11. Gauss, qui a introduit les imaginaires dans la théorie des nombres, leur a appliqué plusieurs des théorèmes connus relatifs aux nombres réels. On donnera seulement ici

l'extension de la loi de réciprocité, avec la démonstration de Lejeune-Dirichlet.

On dit qu'un nombre *complexe* $a + bi$ est premier quand il n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'une des quatre *unités* ± 1, $\pm i$. De là les remarques suivantes dues à Gauss.

1° *Tout nombre premier réel* $p = 4 - 1$ *est premier complexe*, car si l'on avait $p = (a + bi)(c + di)$, on pourrait aussi écrire $p = (a - bi)(c - di)$, d'où on tirerait, en multipliant, $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, ce qui est impossible, p ne pouvant diviser une somme de deux carrés.

2° *Le nombre réel* 2 *et les nombres premiers réels* $p = 4 + 1$ *sont composés au point de vue complexe*, car on a : $2 = (1 + i)(1 - i)$, et d'autre part, on peut écrire :

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) .$$

3° *Pour que* $a + bi$ *soit premier, il faut et il suffit que sa* norme $a^2 + b^2$ *le soit, au point de vue réel.* Supposons que $a + bi = (c + di)(e + fi)$; on aura de même $a - bi = (c - di)(e - fi)$, d'où

$$a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)(e^2 + f^2) .$$

Réciproquement, si $a^2 + b^2$ est un nombre composé, il en est de même de $a + bi$. Soit $p = g^2 + h^2$ un des diviseurs premiers de $a^2 + b^2$, on aura :

$$a^2 \equiv -b^2 \quad \text{et} \quad g^2 \equiv -h^2 , \quad \text{d'où en multipliant,} \quad (ag + bh)(ag - bh) \equiv 0 .$$

Or

$$p(a^2 + b^2) = (ag \pm bh)^2 + (ah \mp bg)^2 .$$

De ces deux congruences, on conclut que l'un des deux nombres $ag \pm bh$ est de la forme kp ; et par suite, l'un des deux autres $ah \mp bg$, de la forme lp. De là, en éliminant a et b, la relation

$$a + bi = (k + li)(g + hi) .$$

12. 1° *Disons par extension que* $a + bi$ *est résidu ou non résidu de* $p = 4 - 1$ *selon qu'on peut ou qu'on ne peut écrire :* $(x + yi)^2 \equiv a + bi$; $a + bi$ *est résidu ou non en même temps*

que $a^2 + b^2$. Soit $(x + yi)^2 \equiv a + bi$; on aura de même $(x - yi)^2 \equiv a - bi$, et par suite,

$$(x^2 + y^2)^2 \equiv a^2 + b^2 .$$

D'un autre côté, on peut toujours écrire[1] : $g^2 + h^2 + 1 \equiv 0$; $g^2 + h^2$ est donc un non résidu puisque -1 est non résidu de $p = 4 - 1$; et il en est de même de $g + hi$, car autrement, d'après le premier cas, $g^2 + h^2$ serait résidu.

Si $a + bi$ est également un non résidu, le produit

$$(a + bi)(g + hi) = (ag - bh) + (ah + bg)i$$

est résidu, ainsi que

$$(ag - bh)^2 + (ah + bg)^2 = (a^2 + b^2)(h^2 + g^2) ;$$

par conséquent, $a^2 + b^2$ est non résidu.

Ainsi $1 + i$ et $1 - i$ sont résidus ou non résidus en même temps que 2, c'est-à-dire selon que $p = 8 - 1$ ou $8 + 3$.

2° *On peut toujours écrire* $x \equiv (a + bi) \pmod{A + Bi}$, *les nombres* A *et* B *étant premiers entre eux;* car cette relation revient à

$$x - a - bi = (y + zi)(A + Bi) .$$

Or on peut poser $By + Az = -b$; y et z étant ainsi déterminés, on aura, pour la valeur de x, l'entier $a + Ay - Bz$.

3° On démontrera, de la même manière que pour les nombres réels, que *le produit de deux résidus est un résidu, etc.*

4° Soit $p = A^2 + 4B^2$ un nombre premier $4 + 1$; on dira que $a + bi$ est ou n'est pas résidu de $A + 2Bi$ selon qu'on peut ou qu'on ne peut trouver deux nombres y et z tels que $(y + zi)^2 \equiv (a + bi) \pmod{A + 2Bi}$.

Posons d'après 2° $x \equiv y + zi \pmod{A + 2Bi}$. La question revient à découvrir les conditions de possibilité de la relation

$$(\alpha) \qquad x^2 - a - bi = (A + 2Bi)(t + ui)$$

[1] Voir *Ens. math.*, 1907, p. 31 et 454.

ou celle des suivantes

$$(\beta) \qquad x^2 = a + \mathrm{A}t - 2\mathrm{B}u\ , \quad -b = \mathrm{A}u + 2\mathrm{B}t\ ,$$

d'où

$$(\gamma) \qquad \mathrm{A}x^2 - \mathrm{A}a - 2\mathrm{B}b = pt\ ,$$

ce qui montre que $\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b$ est résidu de p, car A l'est lui-même (9).

Réciproquement si cette condition a lieu, $a + bi$ est résidu de $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i$. En effet il y a un résidu $r \equiv x^2$ qui, multiplié par le résidu $\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b$, donne le résidu A; de là la relation (γ) qu'on peut écrire

$$\mathrm{A}(a + \mathrm{A}t - x^2) + 2\mathrm{B}(2\mathrm{B}t + b) \equiv 0\ :$$

$2\mathrm{B}t + b$ est donc de la forme $-\mathrm{A}u$, ce qui donne (β) et de là (α).

Ainsi, p *désignant un nombre premier* $\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2$ *de forme* $4 + 1$, a + bi *est résidu ou non résidu de* A + 2Bi *selon que* Aa + 2Bb *l'est ou ne l'est pas de* p. Autrement dit, on a :

$$(\delta) \qquad \left(\frac{a + bi}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b}{p}\right)\ . \qquad \text{(Lejeune-Dirichlet)}$$

Ainsi on a :

$$\left(\frac{1 + i}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}}{p}\right)\ ;$$

donc, à cause de 9, on peut dire que $1 + i$ *est résidu on non résidu de* A + 2Bi *selon que* A + 2B *est* 8 ± 1 *ou* 8 ± 3.

5° Soit q un nombre premier $4 - 1$ et $p = \mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2$ un nombre premier $4 + 1$; on a, d'après 1° et 4°,

$$\left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\ ,$$

$$\left(\frac{q}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{q\mathrm{A}}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{A}}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}{q}\right) = \left(\frac{q}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right)\ .$$

6° Soient $p = A^2 + 4B^2$, $p = A'^2 + 4B'^2$, deux nombres premiers $4 + 1$; on a :

$$\left(\frac{A + 2Bi}{A' + 2B'i}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p'}\right), \quad \left(\frac{A' + 2B'i}{A + 2Bi}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p}\right)$$

$$(AA' + 4BB')^2 + (2AB' - 2BA')^2 = pp' .$$

Si g est un des facteurs premiers du nombre impair $AA' + 4BB'$, on a, d'après ce qui précède :

$$\left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{p'}{g}\right), \text{ d'où } \left(\frac{g}{p}\right) = \left(\frac{g}{p'}\right) \text{ et } \left(\frac{AA' + 4BB'}{p}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p'}\right),$$

d'où cette généralisation, due à Gauss,

$$\left(\frac{A + 2Bi}{A' + 2B'i}\right) = \left(\frac{A' + 2B'i}{A + 2Bi}\right).$$

13. Il ne paraît pas nécessaire de reproduire ici les renseignements historiques donnés précédemment (*E. M.*, 1909, pp. 347, 432, 434, 440, 446) sur la loi de réciprocité. Il suffira, pour la présente note, — qui n'a d'autre ambition que celle de fournir l'idée et la matière d'un chapitre à un traité élémentaire des nombres, — de la compléter par l'exposé de trois des plus simples démonstrations qu'on a données de ce si remarquable théorème : elles s'appuient toutes les trois sur ce lemme de Gauss, démontré, *E. M.*, 1907, p. 37 :

p *désignant un nombre premier, et* a *un entier inférieur à* p, *appelons* $\varphi(a, p)$ *le nombre des restes supérieurs à* $\frac{p}{2}$ *obtenus en divisant par* p *les* m *premiers multiples de* a ; *on a :*

$$a^m \equiv (-1)^{\varphi(a,p)} \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\varphi(a,p)} .$$

1° *Démonstration d'Eisenstein.* Soient a et b deux entiers impairs premiers entre eux ; construisons un parallélogramme sur ces deux nombres, menons la diagonale et traçons le réseau correspondant aux divisions des côtés. Le nombre des intersections de la $k^{ème}$ ordonnée entre la base et la diagonale est $E\frac{ka}{b}$. Il ne se trouve aucune intersection

sur la diagonale; on a donc :

$$\mathrm{E}\frac{ka}{b} + \mathrm{E}\frac{(b-k)a}{b} = a - 1 \ , \quad \text{nombre pair,}$$

et par suite

$$\mathrm{E}\frac{a}{b} \text{ est de même parité que } \mathrm{E}\frac{(b-1)a}{b}$$

$$\mathrm{E}\frac{2a}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{E}\frac{2a}{b}$$

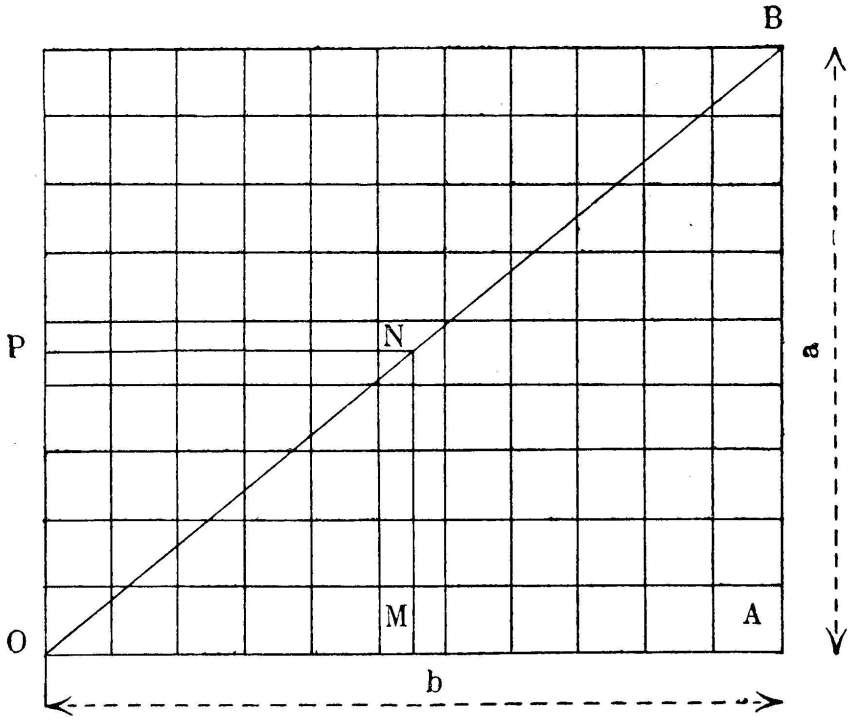
$$\mathrm{E}\frac{3a}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{E}\frac{(b-2)a}{b}$$

$$\mathrm{E}\frac{4a}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{E}\frac{4a}{b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{E}\frac{(b-1)a}{2b} \ldots\ldots\ldots \mathrm{E}\frac{(b \pm 1)a}{2b} \quad (b = 4 \mp 1)$$

d'où on déduit, en se rappelant la notation du n° 4, que $f(a, b)$ est de même parité que $f(2a, b)$. Or si on construit



le parallélogramme $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, on voit que $f(a, b)$ et $f(b, a)$ représentent respectivement les nombres des intersections comprises dans les triangles ONM, ONP. On conclut de là que

$$f(a, b) + f(b, a) = \alpha\beta \ ,$$

et que par suite $f(2a, b) + f(2b, a)$ est de même parité que $\alpha\beta$, ce qui, rapproché de (8), fournit la démonstration de (20).

2° *Démonstration de Voigt.* Divisons par b les β premiers multiples de a, et posons

$$ga < kb < (g+1)a \ , \quad ha < (k+1)b < (h+1)a \ ;$$

celles de ces divisions donnant le quotient k correspondent aux multiples $(g+1)a$, $(g+2)a$, ... $(h-1)a$, ha; et parmi ces $h-g$ divisions, celles qui fournissent des restes plus grands que $\frac{b}{2}$ sont déterminés par la relation

$$(g+x)a - kb > \frac{b}{2} \ ,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad h \geqq g + x > \frac{2k+1}{2a} b \ ;$$

elles sont donc au nombre de

$$\mathrm{E}\frac{k+1}{a} b - \mathrm{E}\frac{2k+1}{2a} b = \mathrm{E}\frac{k+1}{a} b - \beta - \mathrm{E}\left(\frac{1}{2} - \frac{a-2k-1}{2a} b\right) .$$

Mais le plus petit multiple de a qui, divisé par b, donne un quotient $k = \alpha$, et un reste $> \frac{b}{2}$, est supérieur, d'après (α), à

$$(\beta) \qquad \frac{2k+1}{2} b = \frac{ab}{2} > \frac{b-1}{2} a = \beta a \ ;$$

et le plus grand multiple de a qui, divisé par b, donne un quotient $k = \alpha - 1$ avec un reste $> \frac{b}{2}$, est, également d'après (α), au plus égal à

$$ha = \left(\mathrm{E}\frac{k+1}{a} b\right) a < \left(\frac{k+1}{a} b\right) a = (k+1)b = \frac{a-1}{2} b < \frac{b-1}{2} a = \beta\alpha \ ,$$

si on suppose $b > a$.

D'après le lemme fondamental (*E. M.*, 1907, p. 287), les restes sont tous différents, et par suite on aura le nombre $\varphi(a, b)$ des restes supérieurs à $\frac{b}{2}$ en faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \alpha - 1$ dans (β) et additionnant.

Il vient ainsi, en groupant convenablement les résultats :

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(a,b)+\alpha\beta \\ = \left[\mathrm{E}\frac{b}{a}-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\right)\right]+\left[\mathrm{E}\frac{2b}{a}-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{2b}{a}\right)\right] \\ \qquad\qquad +\ldots+\left[\mathrm{E}\frac{a-1}{2a}b-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{a-1}{2a}b\right)\right] \\ \equiv \mathrm{E}\frac{b}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\right)+\mathrm{E}\frac{2b}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{2b}{a}\right) \\ \qquad\qquad +\ldots+\mathrm{E}\frac{a-1}{2a}b+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{a-1}{2a}b\right). \qquad \pmod 2 \end{array}\right.$$

Or la valeur de $\mathrm{E}\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)$ est 0 ou -1 selon que le reste de la division de c par a est $\gtrless \frac{a}{2}$. En effet, soit $c = a\alpha + r$, on aura $\mathrm{E}\frac{c}{a} = \alpha$, d'où

$$\mathrm{E}\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)=\mathrm{E}\left(\alpha+\frac{1}{2}-\alpha-\frac{r}{a}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{a}\right),$$

de sorte que, selon que $r = \frac{a}{2} \pm \omega$, il vient

$$\mathrm{E}\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)=\mathrm{E}(\mp\omega).$$

Le dernier membre de (γ) représente donc, au signe près, le nombre $\varphi(b, a)$ des restes $> \frac{a}{2}$ provenant de la division par a des α premiers multiples de b ; d'où

$$(\delta)\qquad \varphi(a,b)+\varphi(b,a)\equiv\alpha\beta. \qquad \pmod 2$$

3° *Démonstration de Kronecker.* Le reste de la division de ha par b est $> \frac{b}{2}$ si on peut trouver un entier k tel qu'on ait :

$$(\alpha)\qquad ha < bk < ha+\frac{b}{2},$$

d'où

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} (ha-bk)\left(ha-bk+\frac{b}{2}\right)<0 \\ \text{ou}\quad (ha-bk)\left(ha+\frac{a+1-2k}{2}b-\frac{ab}{2}\right)<0. \end{array}\right.$$

Tout autre entier mis à la place de k changerait le sens de l'une des inégalités (α) et rendrait ainsi positif le premier membre de (β). D'autre part, comme $h \leqq \beta$, on a :

$$bk < \frac{b-1}{2}a + \frac{b}{2} < \frac{ba}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{d'où} \quad k < \frac{a+1}{2} \quad \text{et} \quad k \leqq \frac{a-1}{2} = \alpha .$$

Par conséquent, selon que ha fournit un reste $\lessgtr \frac{b}{2}$, on a, à cause de (β), en y remplaçant successivement k par 1, 2, 3, ... α, et multipliant,

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ha-b)(ha-2b) \ldots (ha-\alpha b)\left(ha+\alpha b-\frac{ab}{2}\right) \\ \qquad \ldots \left(ha+2b-\frac{ab}{2}\right)\left(ha+b-\frac{ab}{2}\right) \gtrless 0 . \end{array} \right.$$

De la sorte, en changeant dans (γ), h en $1, 2, 3, \ldots \beta$, et multipliant, on pourra dire que le produit

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a-b) \ldots (a-\alpha b)\left(a+\alpha b-\frac{ab}{2}\right) \ldots \left(a+b-\frac{ab}{2}\right) \\ \times (2a-b) \ldots (2a-\alpha b)\left(2a+\alpha b-\frac{ab}{2}\right) \ldots \left(2a+b-\frac{ab}{2}\right) \\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (\beta a-b) \ldots (\beta a-\alpha b)\left(\beta a+\alpha b-\frac{ab}{2}\right) \ldots \left(\beta a+b-\frac{ab}{2}\right) \end{array} \right.$$

est $\gtrless 0$ selon que le nombre $\varphi(a, b)$ des restes $> \frac{b}{2}$ est pair ou impair.

Changeons a en b et b en a ; le nouveau produit sera $\gtrless 0$ selon que le nombre $\varphi(b, a)$ des restes $> \frac{a}{2}$, obtenus en divisant par a les α premiers multiples de b, sera pair ou impair. Or la substitution indiquée ne modifie pas les facteurs trinômes ; les $\alpha\beta$ facteurs binômes seuls changent simplement de signes : on a donc :

$$\varphi(a, b) = \varphi(b, a)(-1)^{\alpha\beta} .$$

A. AUBRY (Dijon).