Sur les remarques de M. Wilson.

et $\frac{d}{dP}$ est toujours le symbole d'une transformation linéaire (*Omografie vettoriali*, n° 21, p. 45) applicable à un nombre, à un vecteur ou à une homographie fonctions de P. C'est donc un cas bien différent de celui de ∇.

4. M. Timerding dit enfin : « *De plus, on doit se demander, comment il faut définir les opérations, quand on ne veut pas se servir des méthodes cartésiennes, comme est, à ce qu'il paraît, dans les idées des auteurs.* »

La réponse à cette question a été déjà donnée dans nos deux livres : *Elementi*, pp. 66-74; *Omografie vettoriali*, n° 22-25, pp. 49-64.

A la fin de son important article, M. Timerding a bien voulu reconnaître l'importance de l'unification des notations vectorielles, car « *le désaccord actuel dans la terminologie vectorielle est presque sans exemple* » ; et le progrès réel qu'il y aurait si nos notations rationnelles étaient adoptées.

En le remerciant de son *adhésion presque entière* à notre système, nous espérons atteindre le but, que nous poursuivons depuis quelques années, par nos travaux et surtout par nos deux livres.

Sur les remarques de M. Wilson.

1. La variété des notations employées dans le calcul différentiel et intégral est seulement formelle; elle est parfaitement logique, et n'a rien à voir avec le *chaos* des notations vectorielles.

Ainsi en analyse, la dérivée (totale ou partielle), l'intégrale (simple ou multiple) sont désignées par des opérateurs qui peuvent indifféremment changer de forme et de position.

Dans le calcul vectoriel, au contraire, pour le produit vectoriel de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on a la notation complète $\mathrm{V}\{(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{a})(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{b})\}$, abrégée en $\mathrm{V}(\mathbf{ab})$; la notation $|(\mathbf{ab})$, qui, dans le calcul de Hamilton et de Grassmann, sont très exactes. V et | sont des symboles de fonction d'une seule variable; c'est-à-dire, dans les deux cas, le produit quaternional de deux quaternions droits ou le produit alterné de deux vecteurs (bivecteur).

Pour les auteurs qui, ne faisant pas usage des quaternions, emploient la notation abrégée de Hamilton, $\mathrm{V}(\mathbf{ab})$ est fonction d'un certain produit (le *produit complet*) que nous n'avons pas encore réussi à comprendre, ou bien il est fonction de deux variables.

Dans les notations $[\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{a} \,,\, \mathbf{b}]$ le symbole de fonction est [ ], contrairement à toutes les lois ordinaires algébriques et l'on ne sait pas s'il s'agit d'une fonction d'une ou de deux variables. Enfin, dans la notation de Gibbs, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; et dans la nôtre, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, l'*opération* a pris la place de la *fonction*.

Peut-on, sérieusement, comparer tout cela avec la variété purement logique des notations de Leibniz, Lagrange, Cauchy ?

2. M. Wilson se demande ensuite : « *L'uniformité des notations dans l'analyse vectorielle est-elle réellement importante ?* » Il croit que non, parce que « *les formules et les opérations d'analyse vectorielle actuellement employées dans les divers traités de mécanique, électricité, magnétisme et théorie électromagnétique sont en fort petit nombre et ne sont par conséquent pas difficiles à comprendre, quelle que soit la notation employée par l'auteur.* »

C'est, sans doute, une raison fort concluante !

Les applications à la géométrie, à la mécanique, à la physique que nous avons faites (Note IV ; *Elementi*, pp. 95-155 ; *Omografie vettoriali*, pp. 65-111) prouvent clairement que le calcul vectoriel est applicable d'une manière complète à toutes les questions qui se présentent dans ces sciences. Et nous croyons, avec M. Timerding, que c'est surtout la variété des notations qui a jusqu'ici borné les applications de l'analyse vectorielle. Naturellement nous parlons de la variété et du défaut de correction logique, la variété formelle n'ayant pas une grande importance.

3. « *Une uniformité quelconque pourrait-elle être imposée ?* » se demande encore M. Wilson.

M. Klein a très justement observé que dans le calcul vectoriel ne sont pas en jeu des intérêts matériels d'ordre extérieur, comme dans l'Electrotechnique ; on ne saurait donc imposer une uniformité quelconque.

Mais l'uniformité logique, qui domine l'algorithme universel de l'algèbre et de l'analyse, doit s'imposer d'elle-même. Et cela n'arrivera pas par la force brutale des intérêts matériels, mais par la force de la rigueur scientifique, la seule admise dans les mathématiques.

Une fois que l'on aura rejeté les idées imprécises ou absurdes et les notations qui en dérivent, le champ est si borné que l'uniformité sera obtenue tout de suite, exception faite pour la forme des symboles, ce qui est une question tout à fait secondaire. Tel est le but que nous espérons atteindre par nos travaux. Ces travaux n'ont pas permis l'acceptation officielle, de la part du IV^{me} Congrès international des mathématiciens à Rome, de l'un des systèmes vectoriels actuellement connus. Cela nous fait espérer que nous réussirons !

4. M. Wilson, après avoir observé la grande variété des applications de l'analyse vectorielle, ajoute encore : « *Il semble impossible et certainement inutile d'établir un ensemble de notations uniformes pour un nombre aussi considérable de sujets et de méthodes que ceux auxquels les vecteurs peuvent s'appliquer.* »

Il n'y a rien d'impossible et nous l'avons démontré avec nos Notes et avec nos deux livres.

Les vecteurs changent-ils de nature selon leurs applications à des questions de physique ou de géométrie? Alors il est certainement inutile de fixer un ensemble de notations uniformes. Mais M. Wilson sait très bien que les vecteurs, leurs opérations et leurs fonctions restent toujours les mêmes dans les applications; l'unification des notations, dans le sens dont nous avons déjà parlé, s'impose alors comme une nécessité absolue.

M. Wilson a parfaitement raison, s'il parle des auteurs qui nous ont précédés, lorsqu'il observe : « *On doit remarquer que, tant que l'analyse vectorielle traite de questions de physique, elle se sert presque exclusivement du système de coordonnées rectangulaires.....* » Mais nous croyons qu'il n'a pas le droit de juger le *futur;* pour le *présent,* nos travaux lui prouvent qu'il a tort.

5. Nous n'avons pas considéré les fonctions vectorielles linéaires. « *C'est une omission sérieuse,* observe M. Wilson, *car la considération de la fonction vectorielle linéaire peut jeter un jour nouveau sur la question de ce qui est nécessaire pour le système minimum.* »

A la fin de la Note III nous avons dit la même chose; et dans la Note V nous avons rappelé bien d'autres lacunes du système minimum. Nous avons commencé nos études par ce système; mais tout était déjà prêt pour l'étude des fonctions linéaires que nous avons faite dans notre livre *Omografie vettoriali.* En un mot, nos travaux vont bien au delà du système minimum.

Dans notre livre M. Wilson pourra voir que l'étude de la *dyade* de Gibbs *n'est pas le seul moyen* pour comprendre ce que sont les vecteurs et leurs opérations. La *dyade* est un opérateur vectoriel [Note V, note 8] défini par deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Cet opérateur pourra donner, peut-être, notre homographie $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, p. 20, mais il est impossible qu'il donne aussi les opérateurs généraux, c'est-à-dire les « dérivées par rapport à un point ». Ces opérateurs sont en effet à neuf dimensions, et ils devraient dépendre de trois et non pas de deux vecteurs; mais il est important d'observer qu'on peut seulement exprimer une telle dépendance de trois vecteurs au moyen des trois autres *vecteurs fixes de référence;* la dépendance est donc tachygraphique et non absolue. La dyade n'a pas le caractère que M. Wilson lui attribue.

Il semble que M. Wilson est de l'opinion que *la seule manière de voir qu'il y a non seulement 2, mais 3 produits de vecteurs, soit : le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit « dyade »,* est la considération des systèmes linéaires de Gibbs. Nous demandons alors : le produit alterné (bivecteur) de Grassmann dérive-t-il de ces trois? n'est-il pas fondamental? les autres opérateurs de notre *Omografie* sont-ils inutiles? les quaternions, ou les quaternions droits, dérivent-ils de la dyade?

6. On peut toujours exprimer un opérateur vectoriel par des

coordonnées; il fonctionne alors comme *tachygraphe*. C'est un *tachygraphe accidentel*, s'il peut être défini indépendamment des coordonnées; il est au contraire *essentiel*, si une telle définition absolue n'est pas possible.

Les opérateurs $\nabla.$, $\nabla\times$ de Gibbs (Note III, n. 17) sont des opérateurs absolus, car la div et la rot peuvent être définies sans les coordonnées [*Elementi*, pp. 66-71; *Omografie vettoriali*, pp. 56-60]; ∇, au contraire, est un *tachygraphe essentiel* et le signe $\cdot$, ou $\times$, qui le suit, est un opérateur, qui, sans les coordonnées, n'a plus de valeur. La même chose a lieu pour **u** grad, qui n'a rien à voir avec la fonction grad [*Omografie vettoriali*, p. 51], et dans lequel grad figure pour une analogie cartésienne tout à fait accidentelle; et aussi pour Δ et Δ', comme nous avons déjà observé dans notre réponse aux observations de M. Timerding (n. 3)[1].

Après avoir rappelé tout cela, il nous faut observer que si Δ, dans certaines formules, suit les mêmes lois que des vecteurs, ce n'est pas une raison pour justifier la dénomination de *vecteur symbolique*; car la qualité d'être symbolique ne peut pas détruire l'autre d'être vecteur et ∇ n'est pas un vecteur, c'est un *tachygraphe*. Et si M. Wilson se fût donné la peine de lire ce que nous avons écrit au n° 17 de notre Note III, à propos des notations de Gibbs, il n'aurait pas écrit *que notre affirmation est fausse*.

En conclusion, peut-on admettre, dans les mathématiques, un même nom, un même signe, pour indiquer deux choses différentes? Nous ne le croyons pas; par conséquent nous n'avons pas suivi et nous ne suivrons jamais cette voie, qui conduit inévitablement à faire des confusions.

Août 1909. C. Burali-Forti et R. Marcolongo.

Sur le principe d'induction complète.

On reste, semble-t-il, encore indécis sur le rôle à attribuer, en Arithmétique, au principe d'induction complète. Ce principe ne serait-il pas tout bonnement, selon l'expression de M. Poincaré, une *définition déguisée*?

Si l'on admet qu'une théorie purement rationnelle doit se rapporter aux concepts les plus généraux possédant les propriétés dont elle s'occupe, le véritable objet de l'Arithmétique est l'étude de certains *types ordinaux* et, en premier lieu, du type ordinal auquel appartient la suite des nombres naturels et que G. Cantor

[1] La tachygraphie cartésienne ne peut se passer de tels *pseudo-opérateurs* vectoriels.

M. Klein [*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, cours autographié, t. II, pp. 42-139] expose, en la simplifiant, la premiere méthode analytique de Grassmann.

Il est bien connu que M Peano [*Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, ecc., Torino, Fratelli Bocca, 1888] a, depuis longtemps, réduit à une forme absolue les formations de Grassmann; mais M Klein ne fait pas même allusion à ce livre!