Démonstration élémentaire du théorème de Mannheim.

Autor(en): **Sawayama, Y.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

de ces fonctions ; mais on ramène leur étude à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

« La fonction X n'a de dérivée pour aucune valeur de x, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

« Cette fonction satisfait à une infinité de relations fonctionnelles, qui permettent de calculer sa valeur pour toute valeur de x, quand on la connaît pour les valeurs de x comprises dans certains intervalles, aussi petits qu'on le veut d'ailleurs.

« On peut aussi calculer, sous forme finie, l'expression $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}\,(x)\,dx$, lorsque x_0 et x_1 sont deux nombres de l'ensemble (E).

« Enfin ces recherches se rattachent à un mode particulier d'approximation des nombres, dont la numération binaire est un cas particulier, et qui sera peut-être susceptible d'applications arithmétiques. »

Démonstration élémentaire du théorème de Mannheim.

THÉORÈME. -- *Si deux côtés d'un triangle circonscrit à un cercle donné sont fixes et que le troisième côté soit variable, l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle est un cercle.*

Soient I le centre du cercle donné, et ABC le triangle circonscrit dont les côtés AB, AC sont fixes et le troisième côté BC est mobile. Nous voulons démontrer que, quelle que soit la position du côté BC, le cercle circonscrit au triangle ABC est toujours tangent à un cercle déterminé.

A cet effet décrivons un cercle tangent intérieurement au cercle ABC en un point P et qui touche de plus les côtés AC et AB du triangle ABC aux points Q et R. Joignons d'abord PB, PC ainsi que QR, nous avons :

$$\widehat{\mathrm{AQR}} + \widehat{\mathrm{ARQ}} = \widehat{\mathrm{ABC}} + \widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{BPC}}\ ,$$

tous étant supplémentaires à l'angle A. Joignons ensuite PQ et PR ; nous aurons par rapport au cercle PQR :

$$\widehat{\mathrm{AQR}} = \widehat{\mathrm{ARQ}} = \widehat{\mathrm{QPR}}\ .$$

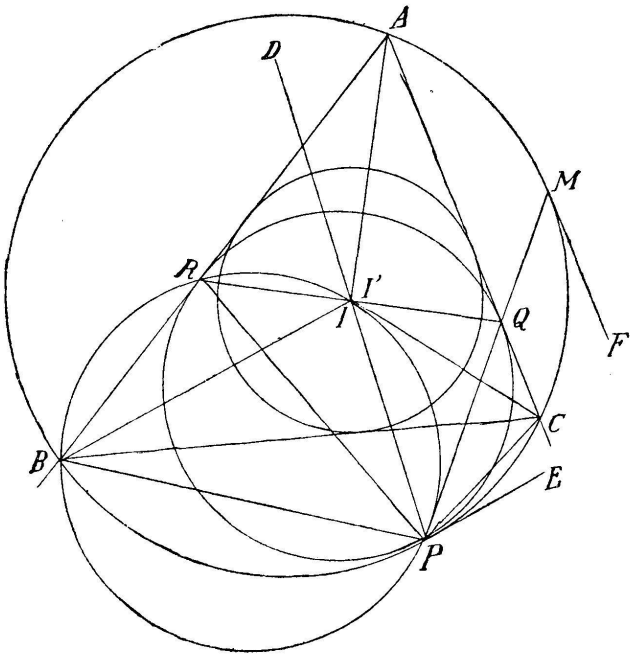
Si donc on mène la bissectrice PD de l'angle BPC, on a :

$$\widehat{\mathrm{BPD}} = \widehat{\mathrm{CPD}} = \widehat{\mathrm{AQR}} = \widehat{\mathrm{ARQ}} = \widehat{\mathrm{QPR}} = \frac{1}{2}\,(\widehat{\mathrm{ABC}} + \widehat{\mathrm{ACB}})\ (1)\ .$$

Soit maintenant M le point où la droite PQ prolongée rencontre

le cercle ABC ; menons les tangentes PE et MF aux extrémités de l'arc PCM, nous avons :

$$\widehat{PMF} = \widehat{MPE} ;$$



mais PE étant aussi tangente à l'arc PQ, on a :

$$\widehat{PQC} = \widehat{QPE} ,$$

et par suite :

$$\widehat{PMF} = \widehat{PQC} .$$

Ce qui montre que MF est parallèle à AC ; le point M est donc le milieu de l'arc AC et :

$$\widehat{MPC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} . \qquad (2)$$

D'après les égalités (1) et (2) on a nécessairement :

$$\widehat{CPQ} < \widehat{CPD} < \widehat{CPR} .$$

Il s'ensuit que la droite PD se trouve à l'intérieur de l'angle QPR ; cette droite rencontre donc la droite QR entre les points Q et R et appelons I′ ce point de rencontre. Comme, d'après l'égalité (1), l'angle I′RA est égal à l'angle I′PB, le quadrilatère I′PBR est inscriptible à un cercle, et par suite :

$$\widehat{RBI'} = \widehat{RPI'}.$$

Mais, puisque

$$\widehat{PPQ} = \widehat{I'PC} ,$$

on a

$$\widehat{RPI'} = \widehat{QPC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} ;$$

la droite BI′ est donc la bissectrice de l'angle B du triangle ABC.

On pourra démontrer de la même manière que la droite CI′ est la bissectrice de l'angle C du même triangle.

Le point I′ est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le centre I du cercle donné. On voit ainsi que les points Q et R sont les points d'intersection de la droite qui, passant par le point déterminé I, est perpendiculaire à la droite AI

avec les côtés fixes AC, AB. Mais comme la droite AI est fixe quelle que soit la position de la droite BC, les points Q et R sont aussi fixes et le cercle PQR qui touche en ces points aux deux droites fixes AC et AB est bien déterminé et ne dépend nullement de la position de la droite BC.

Ainsi donc, tout cercle circonscrit au triangle ABC est bien tangent au cercle déterminé PQR, quelle que soit la position du côté BC.

Y. SAWAYAMA (Tokio).

Sur le dernier théorème de Fermat.

(A propos d'un article de M. Cailler sur les congruences du troisième degré).

Il est facile, comme on sait, de rattacher la théorie de l'équation de Fermat

$$x^l + y^l + z^l = 0$$

à celle des équations et des congruences du troisième degré.

Soient, en effet, s_1, s_2, s_3 les fonctions symétriques élémentaires $x + y + z$, $xy + xz + yz$, xyz. La somme $x^l + y^l + z^l$ est une fonction rationnelle entière à coefficients entiers de s_1, s_2, s_3. En l'égalant à zéro, on obtient une relation de la forme

$$\varphi(s_1, s_2, s_3) = 0 ,$$

φ étant un polynôme de degré l à coefficients entiers.

Or x, y, z sont racines de l'équation

$$t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 = 0 . \qquad (1)$$

On voit donc que l'étude de l'équation de Fermat se ramène à celle de l'équation (1) *caractérisée* par la relation $\varphi = 0$.

Au lieu de l'équation (1) on peut envisager la congruence correspondante mod n, n étant un nombre entier quelconque. L'étude se simplifie, mais la portée de la méthode diminue.

Il m'a paru intéressant d'appliquer à ces congruences les propositions établies par M. Cailler dans son article « Sur les congruences du troisième degré » (*Ens. math.*, novembre 1908, p. 474-487).

Bornons-nous au cas où les nombres x, y, z sont supposés premiers à l, et posons $n = l$. Dans ce cas s_3 n'est pas divisible par l; d'autre part on a toujours

$$x^l + y^l + z^l \equiv x + y + z .$$