

# SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

Autor(en): **Loria, Gino**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10966>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

---

Il y a des questions de Géométrie descriptive qui peuvent se résoudre d'une seule manière et par un procédé simple, lorsque on emploie une certaine méthode de représentation, tandis que, si on se sert d'autres méthodes, on n'en vient à bout qu'en ayant recours à des artifices très variés. C'est dans cette condition particulière que se trouve la question traitée récemment dans cette *Revue* par MM. LEHR (T. IX, 1907, p. 119) et MAJGEN (Id., p. 460); elle se résoud en deux mots, si on se sert de la méthode de la projection centrale, tandis que, dans la méthode de Monge, elle n'a aucune de ces solutions qu'on dirait *nécessaires*. Qu'il me soit donc permis d'ajouter une troisième solution aux deux solutions découvertes par les géomètres cités. Elle est basée sur un raisonnement analogue à celui qui m'a fourni (*Periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, III Série, T. 2, 1904-1905, p. 41; *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, I. Band, Leipzig 1907, p. 54) la détermination des droites bissectrices des angles formés par deux droites données ou des plans bissecteurs des angles dièdres formés par deux plans donnés.

Comme cela est permis, je suppose que les droites  $r, r_1$  dont on cherche la condition de perpendicularité se coupent en un point  $O$  et je m'appuierai sur les deux propositions suivantes, que tout le monde connaît :

*a)* La condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement sur un plan suivant un angle droit est que le plan de projection soit parallèle à un des côtés de l'angle.

*b)* Deux droites concourantes  $r, r_1$  sont perpendiculaires entre elles lorsque elles se correspondent dans l'involution circulaire (ou orthogonale)  $\Omega$  existant dans le faisceau de

rayons situé dans le plan  $\omega \equiv r r_1$  et dont le centre est le point  $O \equiv r r_1$ .

Cela posé, soit (voyez la figure)  $r (r', r'')$  et  $r_1 (r_1', r_1'')$  les deux droites données; si on joint par une droite les points

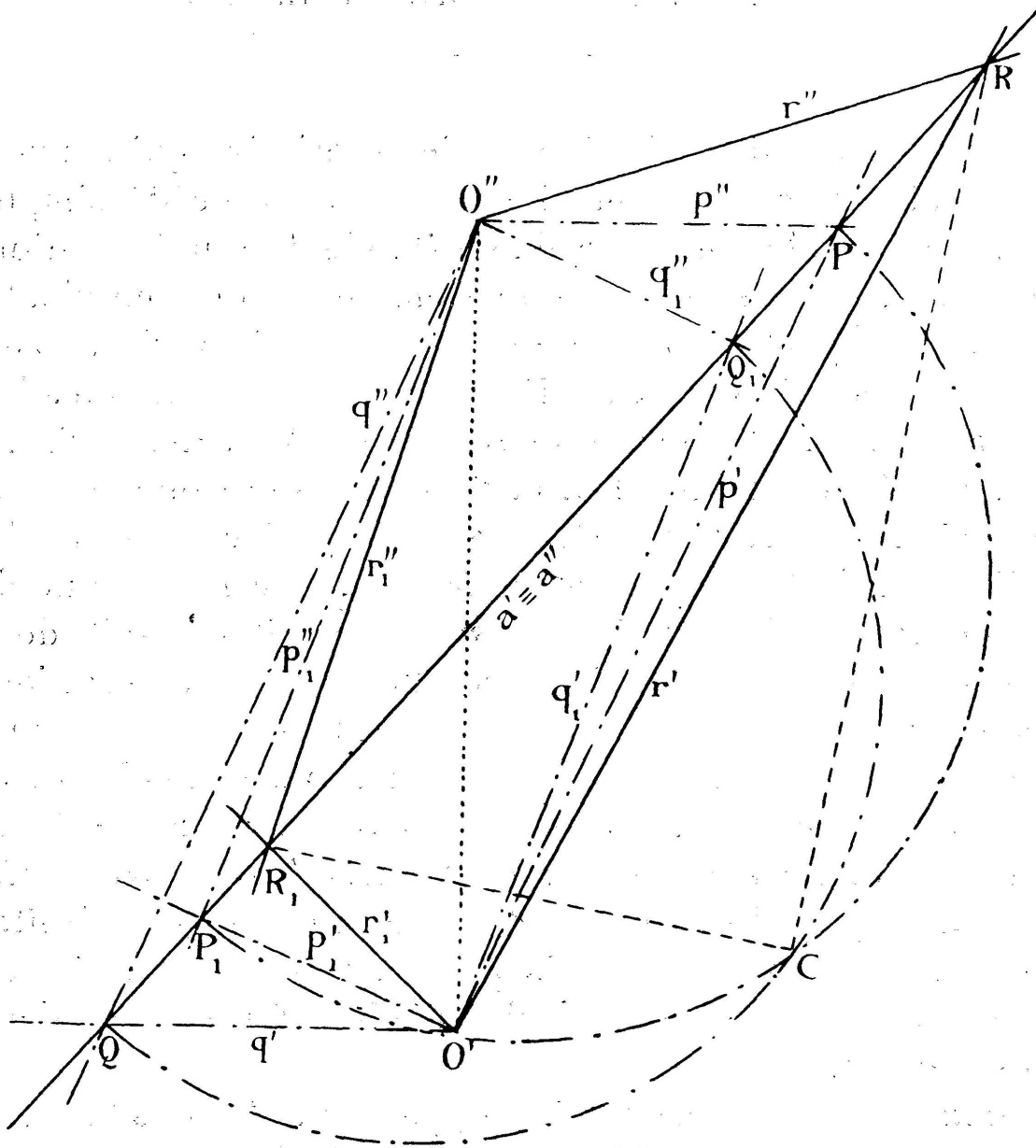


FIG. 1.

$r' r'' \equiv R$  et  $r_1' r_1'' \equiv R_1$ , on obtient l' « axe d'affinité » du plan  $\omega$ , c'est-à-dire le lieu des points où se coupent les couples de projections des droites de ce plan.

Dans le faisceau  $(O, \omega)$  considérons les deux droites  $p, p_1$  qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan horizontal; on sait que  $p''$  est parallèle à la ligne de terre, ou bien (pour éviter le tracé de cette droite)

perpendiculaire à la droite  $O'O''$ , tandis que  $p'$  est la droite qui joint  $O'$  au point  $P$  ou  $p''$  coupe l'axe d'affinité du plan donné. À cause du théorème *a*)  $p'_1$  sera la normale menée par  $O'$  à  $p'$  et on obtiendra  $p''_1$  en joignant  $O''$  au point  $P_1$  ou  $p'_1$  coupe l'axe d'affinité du plan  $\omega$ .

D'une manière tout à fait analogue, on trouve les projections horizontales et verticales des deux droites  $q, q_1$  menées par le point  $O$  dans le plan  $\omega$ , qui sont perpendiculaires entre elles et dont la première est parallèle au plan vertical de projection.

Les deux couples de droites  $p' p'_1, q' q'_1$  déterminent une involution (elliptique) qui est la projection  $\Omega'$  de l'involution circulaire  $\Omega$ ; et les deux couples  $p'' p'', q'' q''_1$  en déterminent une autre  $\Omega''$  qui est la projection verticale de la même involution  $\Omega$ . Or, si on applique le théorème *b*), on voit de suite que  $r$  et  $r_1$  seront perpendiculaires entre elles lorsque  $r''$  et  $r'_1$  seront des rayons correspondants dans l'involution  $\Omega'$  (ou bien si  $r''$  et  $r''_1$  se correspondent en  $\Omega''$ ) et alors seulement.

Cette condition peut s'énoncer d'une autre façon. En effet, si on appelle  $Q$  et  $Q_1$  les points  $q'q''$  et  $q'_1q''_1$ , il est évident que pour la perpendicularité des droites  $r$  et  $r_1$  il est nécessaire et suffisant que les points  $R, R_1$  se correspondent dans l'involution (elliptique) déterminée par les couples  $PP_1, QQ_1$ ; si, donc, le couple  $RR_1$  ne sépare pas le couple  $PP_1$  (ou le couple  $QQ_1$ ) on peut tout de suite affirmer que les droites  $rr_1$  ne sont pas perpendiculaires entre elles. Mais si cela n'a pas lieu, comme les segments  $PP_1, QQ_1$  se séparent, les cercles dont ils sont les diamètres se coupent en deux points réels; soit  $C$  un de ces points; les angles  $\widehat{PCP}_1$  et  $\widehat{QCQ}_1$  étant droits, il s'ensuit que *les droites  $r$  et  $r_1$  seront perpendiculaires entre elles lorsque l'angle  $\widehat{RCR}_1$  est lui-même droit, et seulement alors.*

Cette condition et les constructions nécessaires pour s'en servir ne me semblent pas plus compliquées que celles proposées par MM. LEHR et MAJČEN et les principes que j'ai appliqués ne me paraissent pas plus difficiles et moins connus que ceux sur lesquels ils se sont appuyés; c'est ce qui me

décide à publier cette courte note. Pour terminer je crois utile de faire remarquer qu'elle semble confirmer l'opinion que *les solutions les plus naturelles dans la base et les plus simples dans l'exécution de questions de Géométrie descriptive (élémentaire) s'obtiennent par l'emploi des théories de la Géométrie de position.*

Gino LORIA (Gênes).

---

## SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

---

La détermination directe de la  $m^{\text{ième}}$  dérivée, si importante dans les applications de la série de Taylor, spécialement pour la discussion du reste, se heurte à des difficultés sérieuses qui ne peuvent guère être vaincues que dans quelques cas particuliers. On me permettra de citer ici, comme pouvant quelquefois rendre de bons services dans ce genre de question, une formule aussi simple que peu connue.

Soient une fonction  $y = f(x)$  de la variable  $x$ ,  $F(y)$  une *fonction de fonction*, suivant la terminologie en usage dans les éléments du Calcul différentiel. On demande d'exprimer la  $m^{\text{ième}}$  dérivée par rapport à  $x$ ,  $\frac{d^m}{dx^m} F(y)$ , par des dérivées relatives à la variable  $y$ . La réponse à ce problème est contenue dans la formule

$$\frac{d^m}{dx^m} F(y) = \frac{\partial^m}{\partial y^m} F(y) \varphi'(y) \left( \frac{y - f}{\varphi - x} \right)^{m+1}, \quad (1)$$

dont voici la signification. La fonction inverse de  $f$  est désignée par  $\varphi$ , de sorte que l'équation  $y = f(x)$  se résout ainsi  $x = \varphi(y)$ ; en outre, il faut au second membre de (1), calculer d'abord les dérivées en  $y$ , sans toucher à  $x$ , puis remplacer dans le résultat  $y$  par  $f(x)$ , ou  $x$  par  $\varphi(y)$ .