# B. Points et rayons particuliers.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

## B. Points et rayons particuliers.

1. *Rayons doubles du 2e degré.*

Nous désignerons sous ce nom les rayons $Sl_1$ et $Sl_2$ du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué $l$ du faisceau simple.

1. *Points doubles du 2e degré.*

Nous entendons par points doubles du 2e degré deux points comme $L_1$ et $L_2$ de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de $a_1$. On joint le point de tangence $\lambda$ avec $a$ pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons $Sl_1$ et $Sl_2$ issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. *Rayons doubles du 3e degré.*

Nous appellerons rayons doubles du 3e degré deux rayons homologues confondus tels de $Sp$ et $Sp_1$.

2. *Points doubles du 3e degré.*

Les points doubles du 3e degré sont les points formés par deux homologues P et P′ confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par $\pi_1$. La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons

par $a$ soit $a\pi_1$ et $a\pi_2$. Sur le cercle $a_1\pi_1$ donne $p$, $a\pi_1$ donne $p_1$ et $a\pi_2$ donne $p_2$. Comme $\pi_1$ est déjà sur le cercle $p$ et $p_1$ seront donc confondus avec $\pi_1$. Les rayons passant par S seront $Sp$, $Sp_1$ et $Sp_2$, les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues $Sp$ et $Sp_1$ seront donc confondus tandis que $Sp_2$ ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3e degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point $a$ qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de $a$ dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du* $(2 + 1)^e$ *degré ont trois rayons doubles du 3e degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets $a$ et $a_1$. Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon $aa_2$ en $a$. Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en $a$ et $a_2$, la nouvelle conique eût été tangente au rayon $aa_1$ en $a$. D'un autre côté les points doubles du 3e degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets $a$ et $a_1$ ou $a$ et $a_2$ passeront par ces trois points et par le point $a$.

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques $x$ et $x_1$. D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point $x$.

On passe des rayons doubles du 3e degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale $P\mu$ passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points $m_1$ et $m_2$ tels que $m_2$ est confondu avec $\mu$. D'autre part $S\mu$ donne également $m$ sur le cercle confondu avec $\mu$ ou $m_2$. Donc les rayons homologues $Sm$ et $Sm_2$ sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3e degré. En dehors du point S, les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré ont trois rayons doubles du $(2+1)^e$ degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle $a_1$ $a_2$, etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du $3^e$ degré des divisions circulaires par P et par $a_1$. Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

3. *Rayons triples.*

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du $(2+1)^e$ degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : S$k$ confondu avec S$k_1$ et S$k_2$.

3. *Points triples.*

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la $(2+1)^e$ classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple : K confondu avec $K_1$ et $K_2$ .

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de $a_1$ et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués $kk_1$ et $kk_2$ des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe $\varkappa$ des deux courbes. La droite S$\varkappa$ donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point $a_1$ , ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

## 4. *Rayons rectangulaires conjugués.*

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du $(2+1)^e$ degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que $Sm$ et $Sm_1$ qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de $Sm$ soit $Sm_2$ dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées $Sm$ et $Sm_1$ dépendent de rayons $a_1 m$ et $am_1$ passant par les extrémités d'un diamètre $mm_1$. Leur recherche dépend maintenant du problème suivant:

*Problème:* Etant donné deux points fixes d'un cercle $a$ et $a_1$ et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

*Solution:* Dans la fig. 4 considérons le diamètre $xy$; il donne les droites $xa_1$ et $ya$; après une demi-révolution $y$ vient en $x$ et vice-versa; le rayon $ya$ donne $xa$ et $xa_1$ donne $ya_1$. Dans ce cas les rayons $ya_1$ et $ax$ ne sont pas à considérer sur le diamètre $xy$ mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre $xy$ ne correspondent que deux droites conjuguées $xa_1$ et $ya$. Si $xy$ tourne autour du *centre de* manière à ce que $x$ décrive toute la circonférence $xa_1$ et $ya$ engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet $aa_1$ et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par $a$ et $a_1$. Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau $a$ comme $ax$ et $am_1$ correspondent dans le faisceau $a_1$ à $a_1 y$ et $a_1 m$ et donnent:

$$\sphericalangle\, xa\, m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle\, xom_1$$

$$\sphericalangle\, ya_1\, m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle\, yom$$

Ces angles sont égaux ; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons des faisceaux homographiques égaux ; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par $a$ et $a_1$ . D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons $oa_1$ et $oa$ . Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

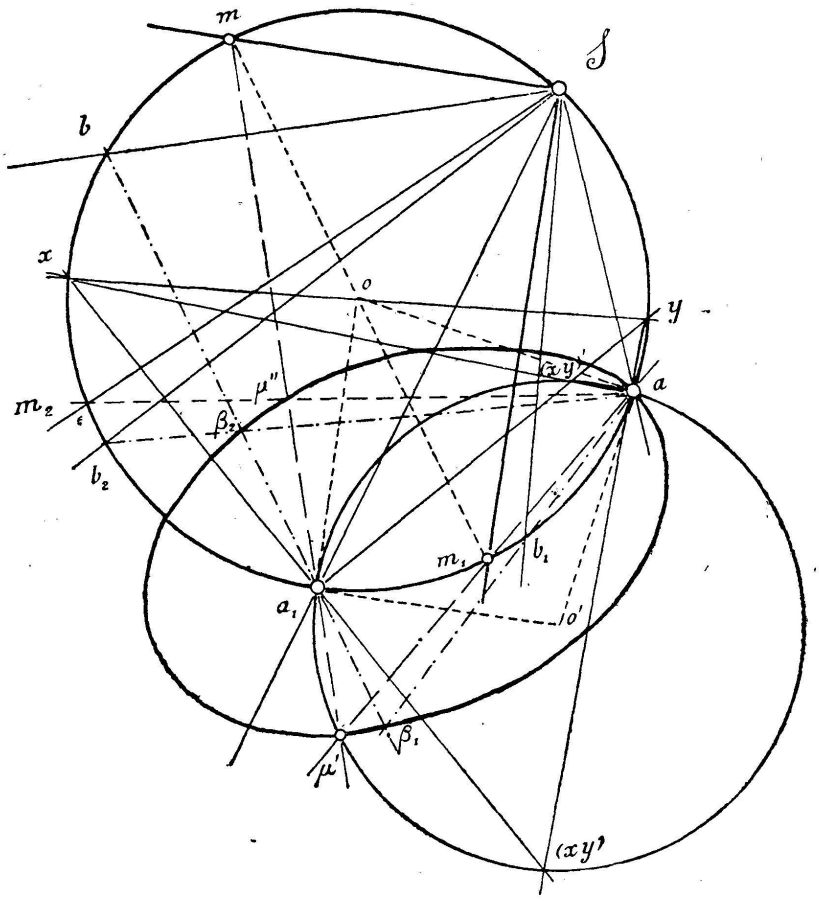



Fig. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré en $a$ et $a_1$ ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons $a_1 m$ et $a m_1$ correspondant aux rayons cherchés $Sm$ et $Sm_1$ , sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homolographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point

d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de $a$ ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec S les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S.

*Les faisceaux homographiques concentriques du* $(2 + 1)^e$ *degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe $\mu_1$ des courbes avec $a$ et $a_1$ . On a $a_1\mu_1$ et $a\mu_1$ . La première droite donne $\mu''$ sur la conique et $m$ sur le premier cercle. La seconde droite donne $m_1$ sur le même cercle ; $m$ et $m_1$ sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment S$m$ perpendiculaire à S$m_1$ . Le deuxième rayon conjugué de S$m$ soit de S$m_2$ se déduit de $\mu''$ avec $a\mu''$ (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à S et P engendrent deux faisceaux homographiques de sommets S et P et forment un groupe du $(2 + 1)^e$ degré. Le faisceau multiple a comme sommet S et le faisceau simple P. La courbe correspondante est une courbe du 3e degré avec S comme point double et P comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de S et de P avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S . On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

## 5. *Points limites.*

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la $(2 + 1)^e$ classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à l'$_\infty$.

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons S$l$ parallèle à la base. Le rayon $a_1 l$ donne $\lambda'$ et $\lambda''$, sur la conique, auxquels correspondent $a_1 l_1$ et $a_1 l_2$.

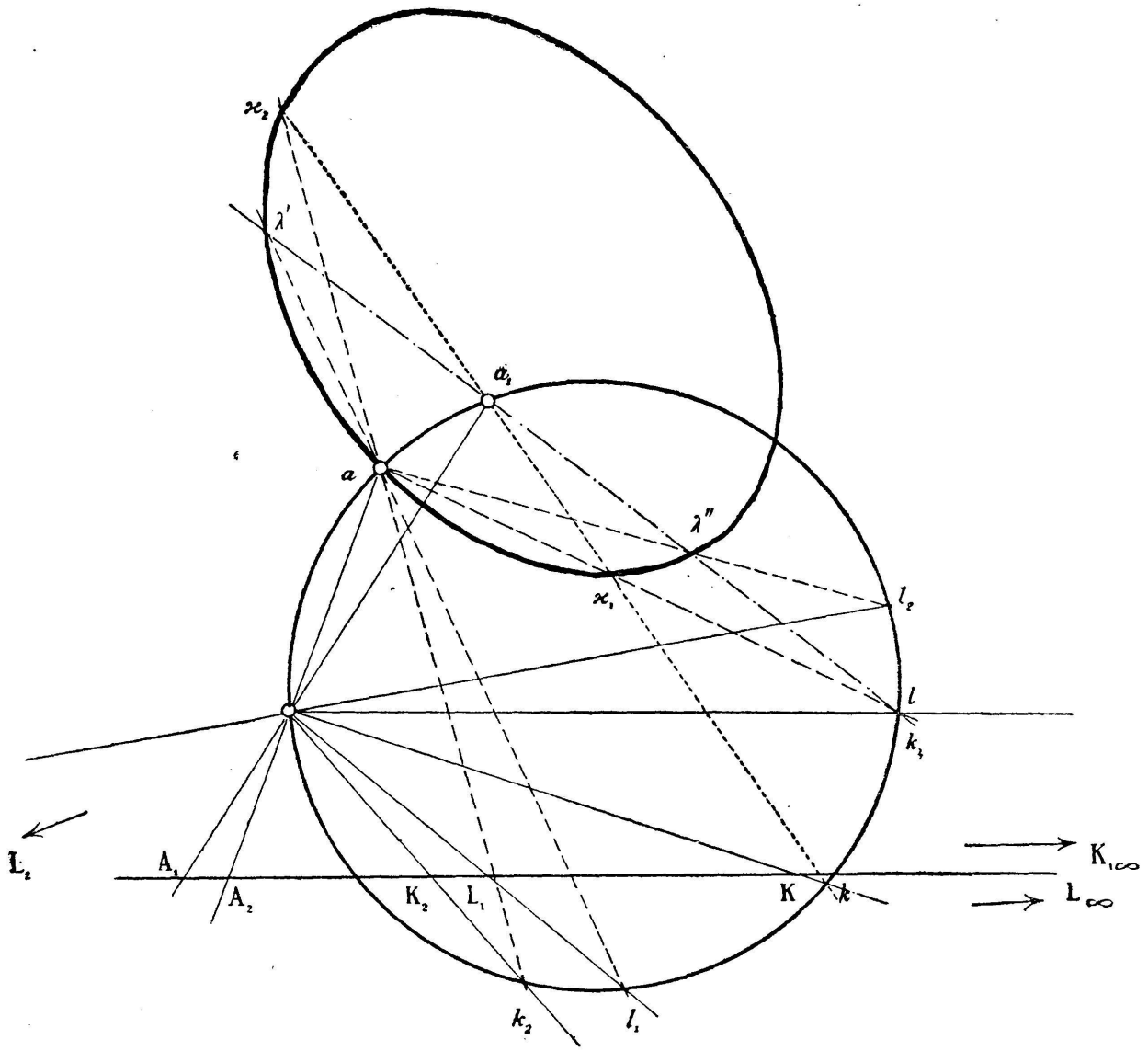



FIG. 5.

Les rayons S$l_1$ et S$l_2$ donnent $L_1$ et $L_2$ sur la base comme points conjugués de $L_\infty$.

$L_1$ et $L_2$ forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler S$k_1$ ; le rayon $ak_1$ donne $x_1$ sur la conique, puis $a_1 x_1$ donne $x_2$, sur la conique également et $k$ sur le cercle ; la droite $ax_2$, donne $k_2$ sur le cercle.

Les rayon $Sk$ et $Sk_1$ puis $Sk$ et $k_2$ sont conjugués. Ils donnent sur la base :

K conjugué de $K_{1\infty}$

$K_2$ » de K et lié à $K_{1\infty}$

K et $K_2$ forment le 2e groupe de points limites.

## C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^e$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

*Première construction.* Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués, $aa_1$ ; $aa_2$ ; $bb_1$ ; $cc_1$ et $dd_1$ . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base $xy$ , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente $b$ suivant une division double, puis la tangente conjuguée $b_1$ suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de $a_1 a_2 b_1 c_1 \ldots$ coupent $b$ et celles issues de $abcd \ldots$ coupent $b_1$ . Ces deux nouvelles divisions ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \ldots$ forment un groupe de $(2 + 1)^e$ classe avec un point homologue commun $\beta\beta_1$ . Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point $\mu$ de $b_1$ on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues $\mu_1$ et $\mu_2$ sur $b$. Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur $xy$ , soient $m$, $m_1$ et $m_2$.

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple $b_1$ avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.