Sur les formules fondamentales des Combinaisons.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Cette réduite peut s'écrire sous la forme, plus commode, à notre point de vue :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} - \varepsilon\frac{\sqrt{\frac{q^3}{27}}}{u}\right) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} .$$

Cette forme, nous l'avons étudiée ci-dessus. Ici encore, il faudrait distinguer trois cas, et pour chacun de ces cas, nous trouverions des résultats bien connus.

Ainsi, par exemple, quand $\varepsilon = 1$, nous poserons

$$\mathrm{Sh}\,(\alpha + 2k\pi i) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} ,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= + \sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{\frac{\alpha + 2k\pi i}{3}} \\ y &= - \sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{-\frac{\alpha + 2k\pi i}{3}} \end{aligned}\right. \qquad (k = 0, 1, 2) .$$

Afin que le produit xy soit réel, il faut prendre la même valeur de k, simultanément dans ces deux relations.

Nous trouverons finalement

$$z = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\, \mathrm{Sh}\, \frac{\alpha + 2k\pi i}{3} ,$$

la racine réelle correspondant à $k = 0$.

Louis Casteels (Louvain).

Sur les formules fondamentales des Combinaisons.

Nous nous proposons de montrer dans cette Note que l'on peut obtenir les formules fondamentales des combinaisons en les envisageant comme cas particuliers d'une propriété générale.

A cet effet nous allons d'abord démontrer le théorème suivant sans avoir recours aux expressions P_n , C_m^n et A_m^n .

1. Théorème. — *Etant donnés* p *nombres* $n_1, n_2, \dots, n_p$ *tels que* $n_1 + n_2 + \dots + n_p = m$, *le produit*

$$C^{n_2}_{n_1+n_2} \cdot C^{n_3}_{n_1+n_2+n_3} \cdots C^{n_p}_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_p}$$

qui s'écrit plus brièvement

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k}$$

est constant, quelque soit l'ordre dans lequel on épuise les nombres n_k.

En effet, partageons m lettres en p classes, respectivement de $n_1, n_2, \ldots, n_p$ lettres. On peut former la 1e classe, quant aux lettres qui y entrent de $C_m^{n_1}$ manières ; les deux premières classes peuvent se former simultanément de $C_m^{n_1} \cdot C_{m-n_1}^{n_2}$ manières et ainsi de suite. Enfin, les $(p-1)$ premières classes peuvent être formées de

$$C_m^{n_1} C_{m-n}^{n_2} \ldots C_{m-(n_1+n_2+\ldots+n_{p-2})}^{n_{p-1}}$$

manières, tout en *coexistant.* La dernière classe se trouve formée d'elle-même. On voit donc, que le nombre total de manières dont les p classes peuvent coexister est indépendant de la classe choisie comme dernière. De là résulte, avec un changement de notations, le théorème annoncé.

2. Valeur du produit

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k}.$$

Chaque manière de former l'ensemble des p classes donne lieu à $P_{n_1} \cdot P_{n_2} \ldots P_{n_p}$ permutations des m lettres. Donc

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{P_m}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_p}}.$$

3. Corollaires : A. *Expression* de P_m. Faisons $p = m$; $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$. Alors (1) donne

$$P_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m = m\,!$$

B. *Expression* de C_m^n. — Faisons $p = 2$, et l'on voit que (1) est la généralisation de la formule :

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}\,;$$

celle-ci est donc démontrée.

C. *Expression* de A_m^n. Elle résulte de la formule évidente :

$$A_m^n = P_n \cdot C_m^n.$$

4. Remarques. — La formule (1) montre que si $m = \Sigma_{n_k}$, le nombre $\frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots n_p!}$ est entier. En particulier $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]!$ est divisible par $1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \ldots (n-1)^2 n$.

Si nous partageons les m lettres, en n_1 classes de α_1 lettres, etc. en n_p classes de α_p lettres, on a $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots + \alpha_p n_p = m$. Si l'on décompose alors le nombre m, de toutes les manières possibles sous la forme indiquée, il est visible que l'on a l'identité :

$$\sum \frac{(\alpha_1-1)!^{n_1}(\alpha_2-1)!^{n_2}\ldots(\alpha_p-1)!^{n_p}}{n!\, n_2! \ldots n_p!} \prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = m!$$

Si l'on remplace les produits Π par leurs valeurs déduites de

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{m!}{(\alpha_1!)^{n_1} \ldots (\alpha_p!)^{n_p}}$$

on trouve l'identité connue :

$$\sum \frac{1}{n_1!\, \alpha_1^{n_1} n_2!\, \alpha_2^{n_2} \ldots n_p!\, \alpha_p^{n_p}} = 1 .$$

J. Malaise (Liège).

CHRONIQUE

Les mathématiques au IIIe Congrès international de Philosophie, Heidelberg, 1908.

Au IIIe Congrès international de philosophie, qui a eu lieu à Heidelberg, du 31 août au 5 septembre derniers, les communications se rattachant aux Sciences mathématiques n'ont pas eu autant de relief que dans les deux Congrès précédents, de Paris (1900) et de Genève (1904).

La cause de ce fait doit peut-être être cherchée dans la séparation, beaucoup plus tranchée, que ce n'est le cas dans d'autres pays, qui subsiste en Allemagne entre les mathématiciens ou physiciens spécialistes et les « philosophes » dans le sens universitaire du mot. Tandis qu'en France par exemple, des savants tels que