Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

bien flou, et celà est très gênant. Cette phrase : « Les axiomes viennent de l'expérience » n'a pas un sens net, il me serait facile de le montrer, mais celà m'entrainerait trop loin. C'est une raison, et il y en a bien d'autres, pour être très modéré dans les discussions philosophiques et pour ne pas avoir peur de changer d'avis. Il faudrait trouver un moyen d'exprimer sa pensée d'une façon bien nette, sans ambiguïté. Je ne désespère pas d'y arriver, mais je n'y suis pas encore complètement parvenu en ce qui concerne la question des axiomes.

J. RICHARD (Dijon).

3. RÉPLIQUE DE M. COMBEBIAC.

Ainsi que le fait remarquer M. Richard, il est fort difficile de s'entendre sur certaines questions parce que les mots n'ont que la signification que chacun leur donne. Je crois toutefois pouvoir constater notre accord sur les deux points essentiels, savoir : 1° les mêmes lignes ne peuvent pas servir d'axes à une métrique hyperbolique et à une métrique parabolique ; 2° les difficultés incontestablement fort délicates que soulève la question des relations de la Géométrie et de l'expérience sont du même ordre que celles que l'on rencontre pour les diverses branches de la physique, de sorte que l'on se trouve ramené à la grosse question du réalisme *scientifique* et non plus *géométrique*.

Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Ces sommes donnent lieu à d'intéressants exercices de transformations dans les applications de la formule de Moivre. En raison du rôle qu'elles jouent dans les Mathématiques supérieures, leur sommation mérite d'être examinée, à titre d'exercice déjà dans les éléments.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta) , \qquad B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta)$$

et formons la somme

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos(\alpha + k\beta) + i \sin(\alpha + k\beta) \right\} .$$

Cette expression peut se transformer successivement comme suit :

$$A + Bi = (\cos\alpha + i \sin\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos k\beta + i \sin k\beta \right\}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\beta + i\sin\beta)^k$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos\beta + i\sin\beta)^n}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-(\cos n\beta + i\sin n\beta)}{1-(\cos\beta + i\sin\beta)}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2} - 2i\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2} - 2i\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\sin\frac{n\beta}{2} - i\cos\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} - i\cos\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

ou

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\cos\frac{n\beta}{2} + i\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + i\sin\frac{\beta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \left\{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\right\}\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\,.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha + k\beta) &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\,,\\ \sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha + k\beta) &= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\,.\end{aligned}\right\}$$

C. Brandenberger (Zurich).