

CHAPITRE IV Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

trièdre, or ainsi augmentée elle est moindre que quatre droits, à plus forte raison la somme des faces de l'angle polyèdre primitif était-elle donc plus petite que quatre droits.

CHAPITRE IV

Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

I.

Définitions. Considérons (sans figure), les points N , R , M de l'espace qui sont à une *distance* donnée d'un même point O également donné, tous ces points en nombre infini forment ce que l'on appelle une *surface sphérique*; le point O est le centre de la sphère, les divers segments OM , OR , ON ... sont des *rayons* de la sphère.

Ligne d'intersection d'une surface sphérique et d'un plan. Considérons (fig. 33) une surface sphérique de centre O et un plan P ; soit M un point appartenant à cette surface sphérique et au plan P ; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P , joignons les points M et H par une droite, celle-ci sera perpendiculaire à HO ; donnons à la droite MH envisagée comme une barre rigide liée à l'axe HO envisagé comme un pivot rigide, un mouvement de révolution autour de l'axe HO ; dans ce mouvement le point M , nous l'avons vu, ne quitte pas le plan P , il ne quitte pas non plus la surface sphérique puisque pendant ce mouvement la distance OM ne varie pas: *il existe donc une ligne commune au plan P et à la surface sphérique et cette ligne peut-être définie dans le plan P l'ensemble des points de P dont chacun est à une distance fixe du point H , cette ligne est appelée *circonférence de cercle*. H est son centre. Ainsi une surface sphérique et un plan P ont une ligne commune qui est une circonférence de cercle.*

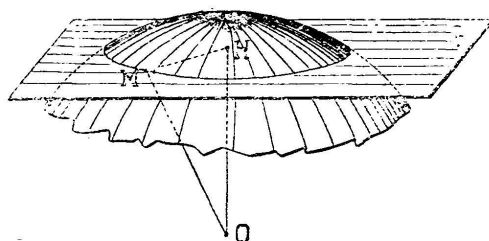


Fig. 33.

Il nous reste à établir que le plan P et la surface sphérique ne peuvent avoir d'autre point commun en dehors de la ligne précédente.

En effet soit (fi. 34) X un point commun à la surface de la sphère et au plan P déjà considérés; soit toujours H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P .

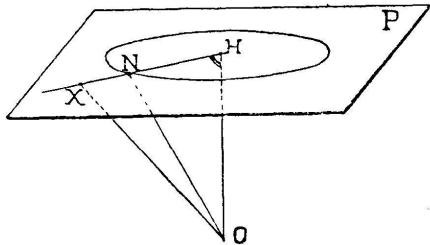


Fig. 34.

Parmi les différents points de la ligne que nous savons déjà commune au plan et à la surface sphérique, il y en aura certainement un, situé sur le segment HX ou sur son prolongement au delà de X ; il suffit

en effet pour obtenir un pareil point N de porter sur la droite HX et du même côté que X un segment HN égal à la longueur HM de la figure précédente.

Or, si le point X différait de N , la droite joignant le point O au milieu de XN serait perpendiculaire à XN et devrait se confondre avec OH ; il y aurait donc contradiction, à moins que les points N et X ne se confondent.

Remarque. Si (fig. 33) les points H et M coïncidaient, le cercle d'intersection s'évanouirait sur le point H qui serait alors le seul point commun au plan et à la sphère.

II. — Remarques.

Cas d'égalité de 2 triangles rectangles. La manière dont nous venons d'utiliser ainsi les propriétés des perpendiculaires et des obliques mérite d'être retenue pour elle-même; c'est ce que nous ferons par les deux théorèmes suivants qui nous donnent deux cas d'égalité propres aux triangles rectangles, et dans l'énoncé desquels on appelle *hypoténuse* le côté du triangle qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

1° Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal sont égaux.

2° Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle autre que l'angle droit, égal, sont égaux.

Le premier théorème se démontre en essayant (fig. 35) le

commencement de la superposition par l'angle droit égal et en juxtaposant les 2 sommets C et C' où se croisent deux côtés égaux chacun à

chacun; on aura soin de rabattre les deux triangles d'un même côté par rapport au segment sur lequel sont déjà venus se confondre les côtés de l'angle droit; les hypoténuses devront alors coïncider en position, sans quoi on aurait des obliques égales s'écartant inégalement du pied de la perpendiculaire ce qui, nous venons de le voir, n'est pas possible.

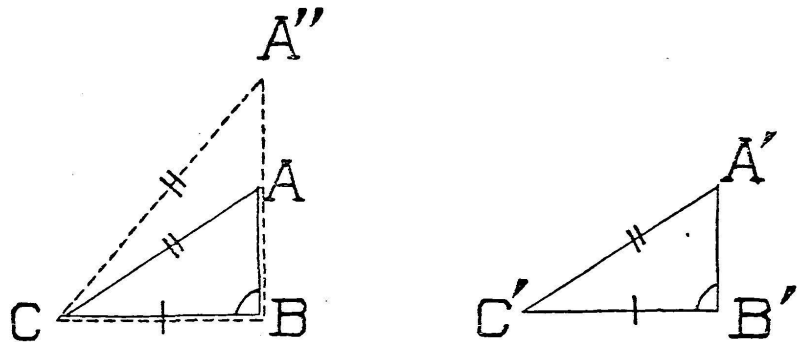


Fig. 35.

Le second théorème se démontre en essayant (fig. 36) le commencement de la superposition par l'hypoténuse égale et par l'angle non droit égal $\hat{A} = \hat{A}'$. L'angle B' droit ne variant pas pendant le trajet, et son sommet étant venu en B'', la superposition commencée doit s'achever d'elle-même sans quoi on pourrait, d'un même point C,

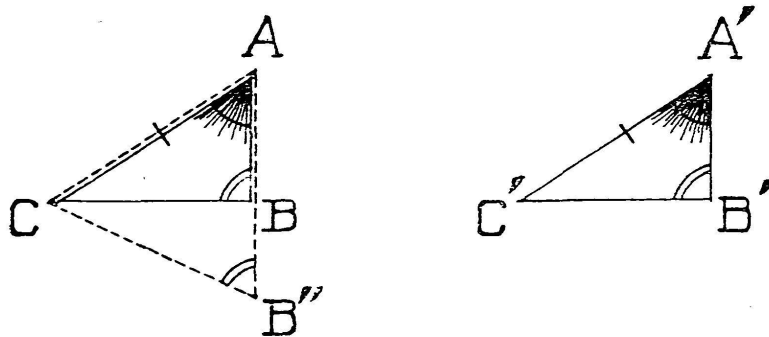


Fig. 36.

abaisser sur une même droite 2 perpendiculaires, CB et CB''. La superposition commencée doit s'achever d'elle-même sans quoi on pourrait, d'un même point C,

abaisser sur une même droite 2 perpendiculaires, CB et CB''.

Autre remarque. Tout angle d'un triangle rectangle autre que l'angle droit donné est *aigu*, c'est-à-dire moindre qu'un angle droit.

En effet, article VIII, chapitre III, la perpendiculaire (fig. 37) CB sur AB tirée de C est plus courte que l'oblique CA tirée du même point C. Or nous avons vu que, si dans un triangle quelconque deux côtés sont inégaux les angles opposés sont inégaux et dans le même ordre de taille que ces côtés. De l'in-

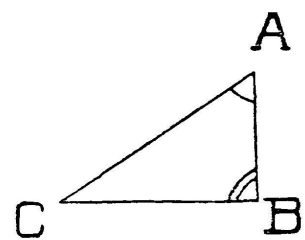


Fig. 37.

égalité $CA > CB$, nous tirons : angle $B > \text{Angle } A$; et comme l'angle B est droit, l'angle A est bien aigu.

III. — Situations mutuelles des droites et des circonférences d'un même plan; situations des plans et d'une sphère.

En raisonnant exactement comme pour la sphère on verra que dans un même plan :

1° Si une droite DD' (fig. 38) et une circonférence de centre O ont en commun un point M , distinct du pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite DD' , elles auront encore en commun, un autre point M' , mais nul autre point commun hors des deux précédents et de plus le point H sera le milieu du segment MM' .

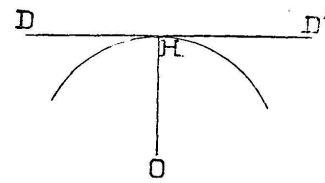
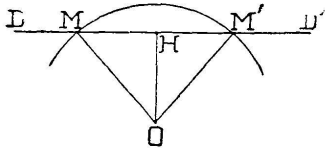


Fig. 38.

2° Si une droite DD' et une circonférence de centre O ont en commun un point H qui est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite, elles n'ont aucun autre point commun. On dit alors que la droite est tangente à la circonférence.

Remarque. — Désignons par d la distance du centre O à la droite DD' c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée sur la droite et soit R la longueur du rayon de la circonférence. Trois cas sont à distinguer, suivant qu'auront lieu l'une ou l'autre des circonstances suivantes, qui s'excluent mutuellement :

1° $d < R$. 2° $d = R$. 3° $d > R$.

On voit de suite que le cas $d > R$ empêche la droite et la circonférence de se couper; que le cas de $d = R$ fait la droite et la circonférence mutuellement tangentes.

Il nous reste à établir que dans le cas de $d < R$ la droite et la circonférence se coupent toujours.

Rappelons-nous à cet effet que les longueurs a, b, c de trois côtés d'un triangle sont assujetties aux inégalités :

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b,$$

d'où on conclut aussi, si par exemple $a > b, c > a - b$.

Ainsi un côté d'un triangle est compris entre la somme et la différence de deux autres côtés; soit alors (fig. 39) H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur DD' . Portons sur DD' et à partir de H une longueur HK égale à $2R$ et joignons O à K par une droite. Nous aurons $OK > KH - HO$, ou $OK > R + (R - HO)$, donc OK est $> R$.

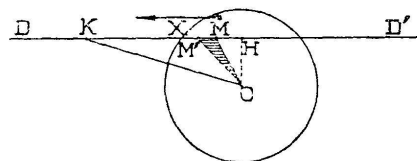


Fig. 39.

Imaginons alors un point M, mobile de H vers K d'une manière continue, soit M' une position du point voyageur, voisine de la position M.

Le triangle OM'M nous donne $OM - MM' < OM' < OM + MM'$; si donc le chemin MM' est pris suffisamment petit; la variation de la longueur OM sera aussi petite qu'on le voudra; en d'autres termes la longueur OM est *une fonction continue* de la longueur MH; or quand le point voyageur va de la position H à la position K, c'est-à-dire quand la longueur variable MH varie de zéro à HK la longueur variable OM a varié depuis la valeur OH moindre que R jusqu'à la valeur OK supérieure à R, d'ailleurs OM est allé toujours en augmentant, *donc la valeur variable de OM a passé UNE ET UNE SEULE FOIS par la valeur fixe R*, c'est-à-dire que le point voyageur a passé par une position X appartenant à la fois à la droite et à la circonférence.

Le principe que nous admettons ici est le suivant: Si une quantité y varie d'une *manière continue* en même temps qu'une quantité x dont la première dépend, et si, pour deux valeurs de x distinctes, (savoir pour $x = a$ et pour $x = b$) y prend deux valeurs distinctes savoir c et d , il existera au moins une valeur de x comprise entre a et b pour laquelle la fonction y prendra une valeur m quelconque mais comprise entre c et d . La démonstration de ce principe appartient à l'enseignement de l'algèbre et nous ne la reproduirons pas ici.

Remarque. — Cette discussion peut être appliquée à la sphère; elle nous montre que tout plan dont la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon de cette sphère coupera effectivement la sphère suivant une circonférence.

IV. — Situations mutuelles de deux circonférences d'un plan.

L'étude rigoureuse des situations mutuelles de deux circonférences deviendra très facile si nous nous reportons encore au principe de continuité, mais nous aurons quelques faits préliminaires à établir.

Premier fait préliminaire. Si (fig. 40), deux droites OA et OB sont obliques sur une même droite AB mais d'un même côté de la perpendiculaire OH tirée de O sur AB, la bissectrice OC de l'angle AOB partage le segment AB en deux portions inégales, la portion CB qui est la plus voisine du point H est la plus petite des deux portions. Le triangle ABO dont l'angle en B

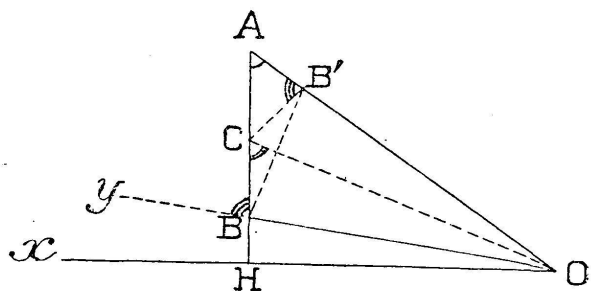


Fig. 40.

est obtus donne : $AO > OB$; portons l'oblique la plus courte OB sur la plus grande; joignons CB' , le triangle $CB'O$ est égal au triangle CBO , d'où on conclut que l'angle $CBY =$ l'angle $AB'C$; or l'angle CBY est extérieur au triangle CBO et l'angle \widehat{BCO} est intérieur; on a donc $\widehat{CBY} > \widehat{BCO} > \widehat{CAO}$; on a donc dans le triangle ACB' ; angle $\widehat{AB'C} >$ angle $\widehat{CAB'}$.

Donc, en considérant les côtés opposés à ces angles :

$AC > CB'$; et comme $CB' = CB$, on a bien :

$AC > CB$, comme nous voulions le démontrer.

Deuxième fait préliminaire. Considérons (fig. 41), une circonférence de centre O , et un angle au centre TOA , constituant l'angle d'un triangle rectangle ayant le rayon OA comme côté d'un angle droit dont le sommet est en A ; soit OT l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Partageons l'angle TOA en n parties égales, la corde AP qui sous tend les arcs correspondants à ces angles au centre sera moindre que la $n^{\text{ème}}$ partie du côté AT .

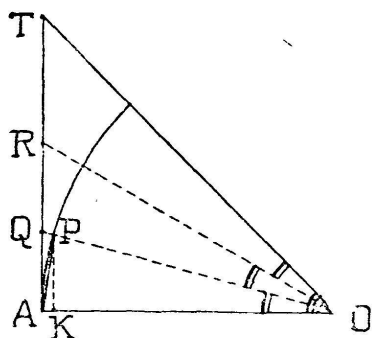


Fig. 41.

En effet soit AQ la première des portions de AT détachées par ces angles, d'après le

fait établi tout à l'heure on a :

$$AQ < QR < \dots < RT, \text{ d'où } AQ < \frac{AT}{n}.$$

Or l'angle QPA étant obtus, et l'angle AQP aigu, on aura $AP < AQ < \frac{AT}{n}$.

THÉORÈME. — Soit (fig. 42), M un point voyageur sur l'arc AB d'une circonférence de centre O , soit O' un autre point du plan.

La longueur $O'M$ varie d'une manière continue quand le rayon OM tourne lui-même d'une manière continue autour de O .

En effet, quand le rayon OM tourne d'un angle

$\widehat{MOM'}$, moindre que $\frac{\widehat{TOA}}{n}$

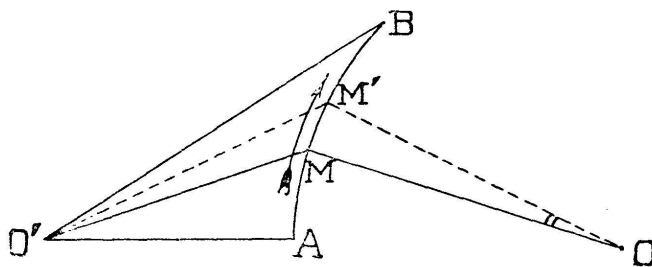


Fig. 42.

de la figure 41, MM' sera moindre que $\frac{TA}{n}$, et comme $O'M -$

$MM' < O'M' < O'M + MM'$, on voit qu'on a pu rendre $\widehat{M'OM}$ assez petit pour que la variation $O'M' - OM$ ou $OM - O'M'$ soit

aussi petite qu'on voudra. La variation de la longueur $O'M$ est donc bien continue.

Première conséquence. Si (sans figure), un arc AB de circonférence réunit un point A intérieur à une autre circonférence C et un point B extérieur à cette même circonférence, l'arc considéré doit traverser la circonférence C en quelque point X .

La démonstration se fait d'elle-même en rapprochant le fait précédent du principe de continuité, car si O est le centre de la circonférence C de rayon R , la longueur OM varie depuis une quantité OA moindre que R jusqu'à une quantité OB supérieure à R , elle doit donc prendre dans l'intervalle la valeur R lorsque le point M est en un certain point X de l'arc AB , mais ce point X étant à distance R de O appartient évidemment à la circonférence C .

THÉORÈME. — Si deux circonférences (fig. 43), ont en commun un point M situé hors de la droite qui réunit leurs centres, elles ont encore en commun un point M' tel que la droite OO' passe par le milieu de MM' et est perpendiculaire à MM' .

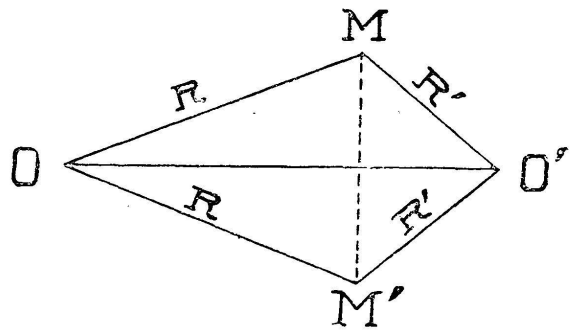


Fig. 43.

La démonstration s'achève par un simple rabattement autour de OO' .

Remarque. — Si deux circonférences ont deux points communs M et M' , les deux centres de ces circonférences se trouvent sur la perpendiculaire élevée au milieu de MM' , de là il résulte évidemment que deux circonférences de centres distincts ne peuvent avoir plus de deux points communs et que lorsqu'elles ont un seul point commun, ce dernier point appartient à la droite qui joint les centres.

Criterion des situations mutuelles de deux circonférences. Par la remarque précédente on voit que si deux circonférences se coupent on doit pouvoir construire un triangle tel que OMO' dans les figures précédentes; on conclut de là que, si d est la distance des centres et que si R est le plus grand des rayons R et e' on aura $R - R' < d < R + R'$.

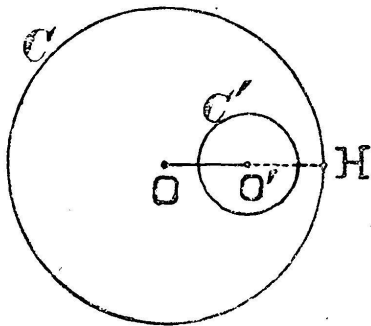


Fig. 44.

Nous allons démontrer la *réci-proque*, mais auparavant supposons que l'on ait : $d < R - R'$, ou $d = R - R' - e$.

Soit (fig. 44) H l'extrémité du rayon de C' issu de O vers O' , un point de la circonférence C' est alors intérieur à C , aucun autre point ne saurait alors

être extérieur, puisqu'alors, comme on l'a vu, les circonférences se couperaient et l'on devrait avoir $d > R - R'$.

On démontrerait de même que si $d > R + R'$ les circonférences ne se coupent point mais sont toutes deux extérieures l'une à l'autre.

Supposons maintenant : $R - R' < d < R + R'$; si $d > R - R'$ il y a des points de C' en dehors de C , si $d < R + R'$ il y a des points de C' en dedans de C , donc d'après un théorème déjà signalé C' et C se coupent.

V. — La notion d'orientation.

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent encore s'énoncer sous une forme plus claire en disant : Un point M (fig. 45), d'une figure solide *plane* est défini par ses deux distances r et r'

à deux points particuliers A et B de la figure. En effet :

1° Quand le point M est fixé en position en même temps que les deux points A et B , il suffit de joindre M à A , M à B et de mesurer les distances r et r' ; celles-ci seront représentées soit par des fiches, soit par des nombres.

2° Quand les *fiches* r et r' sont données, ainsi que la fiche d de la distance AB , la figure est reconstituable au moyen d'une règle, d'un compas et d'une feuille *plane*.

Si l'on a à la fois $r - r' < d <$

$r + r'$ la construction du point M sera possible, au moyen de l'intersection de deux cercles.

Il y a toutefois une réserve à faire ; le tracé du point M défini par les seules distances d, r, r' , conduit en réalité à deux points M et M' . D'ailleurs les deux triangles AMB , et $AM'B$ qui répondent à la question sont superposables, l'un peut être amené sur l'autre par une rotation d'un demi-tour autour de la charnière AB .

L'assemblage solide de trois points ne peut donc pas être défini dans l'espace d'une manière absolument complète par la connaissance de deux des points A et B et par celle du plan passant par A et B dans lequel la figure doit être donnée.

Passons à un assemblage solide plan de quatre points et demandons-nous si cet assemblage est complètement défini et en forme et en position par les connaissances des distances r et r' de M aux deux points de repère A et B , et par les distances s et s' de N aux deux mêmes points de repère.

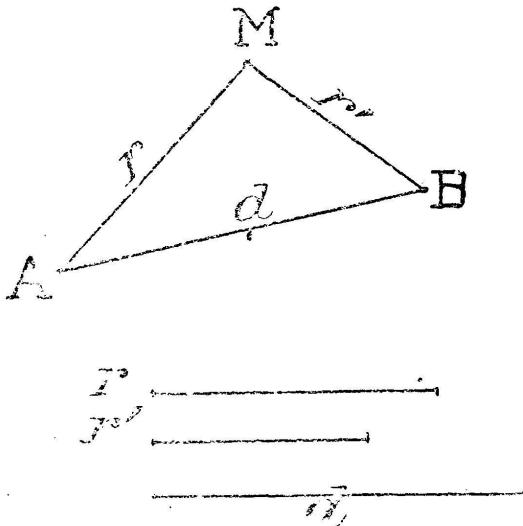


Fig. 45.

Si les données précédentes étaient les seules, on aurait le choix entre les quatre assemblages suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \\ N \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} M \\ N' \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} M' \\ N \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} M' \\ N' \end{array} \right\} \quad (\text{fig. 46}).$$

l'ambiguïté serait donc accrue, puisque non seulement on pourrait hésiter entre quatre assemblages différant tout au moins par la position, mais encore, les divers assemblages ne seraient pas tous superposables. Si le nombre des points augmentait, l'embarras pour reconstruire la figure serait encore accru.

Cet exemple montre nettement que les longueurs des distances des divers points de la figure à deux d'entre eux constituent des données insuffisantes si l'on n'a pas soin d'y ajouter des renseignements *purement qualitatifs* de situations relatives.

Par exemple nous ajouterons aux renseignements des fiches, et pour chaque point nouveau N, un *renseignement de situation* qui sera de l'une ou l'autre espèce suivante :

1° ou bien M et N sont d'un même côté de AB ;

2° ou bien M et N sont de part et d'autre de AB ;

— nous nommerons ces renseignements des renseignements *d'orientation* ; — avec ces renseignements ajoutés à la connaissance des distances, l'assemblage solide plan devient complètement défini, et on n'a plus à hésiter qu'entre deux situations ; on passe d'ailleurs de l'une de ces situations à l'autre par un demi-tour exécuté autour de AB.

Enfin, on pourra même faire cesser toute hésitation entre les deux situations du même solide en se préoccupant des trois dimensions du solide.

Nous pourrions par exemple, dans un solide déterminé, associer à tout plan une poupée invariablement liée au solide, nous pourrions par exemple placer la poupée en A (fig. 47), perpendiculairement au plan considéré du solide, visant le point B de ce plan ; la situation du point M sera alors complètement définie ; si une fois données les distances MA, MB, on ajoute de quel côté

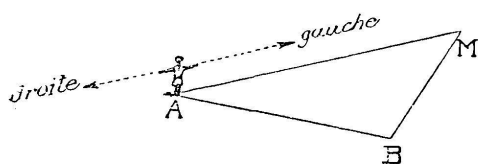


Fig. 47.

(gauche, ou droite) le point M se trouve par rapport à la poupée.

Nous allons retrouver ces notions sur la sphère.

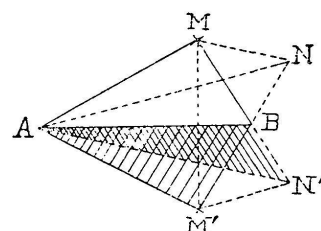


Fig. 46.

VI. — Les cercles de la sphère.

Grands cercles et petits cercles. Analogies des triangles sphériques et des triangles plans.

Toute section plane de la sphère est un cercle, nous l'avons vu, dont le centre est la projection du centre de la sphère sur le plan de la section ; si ce plan passe déjà par le centre de la sphère la ligne d'intersection des deux surfaces sera une circonférence du plus grand rayon possible, c'est une circonférence de grand cercle.

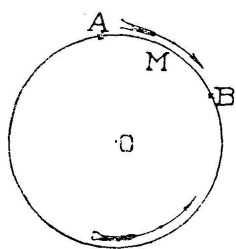
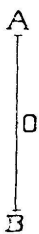
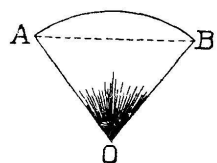


Fig. 48.

Par deux points, A et B (fig. 48), donnés sur la surface sphérique passe toujours un grand cercle, et un seul lorsque du moins les points A et B ne sont pas aux extrémités de deux rayons égaux et directement contraires ; en effet, hormis ce cas d'exception, les droites OA, OB déterminent un plan et un seul, et ce plan va couper la surface sphérique en une circonférence et une seule.

Par contre si la circonférence est unique, l'arc qui réunit les deux points n'est pas complètement déterminé, on peut hésiter entre deux arcs AMB et APB.

Nous considérons plus particulièrement l'arc *réduit* c'est-à-dire celui des deux arcs qui est moindre qu'une demi-circonférence ; cet arc est l'image sphérique de l'angle pointu déterminé par les deux rayons dans la trame triangulaire formée par les 3 points O, A, B.

Deux arcs de grand cercle issus d'un point A vont se réunir en un autre point B nommé l'*antipode* du premier (fig. 49).

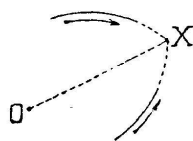
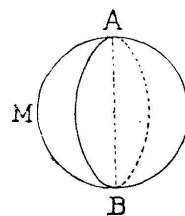


Fig. 49.

Il y a plus : deux grands cercles étant donnés se coupent toujours (fig. 49), en un point X ; en effet les plans des deux grands cercles sont deux plans distincts qui ont déjà en commun le centre O de la sphère, ces deux plans auront

donc une droite commune, or, un point X , situé sur cette droite commune, à une distance de O égale au rayon, est un point de la surface sphérique, commun aux deux arcs.

Les arcs de grand cercle sur une surface sphérique ont évidemment une grande analogie avec les droites du plan, mais la propriété précédente va être un élément de simplification de la géométrie de la sphère. Nous allons poursuivre l'exposé des analogies.

Les deux régions de la surface sphérique par rapport à un grand cercle, sont les analogues des deux régions d'un plan par rapport à une droite; si (fig. 50), deux points A et B sont, par rapport à un grand cercle de la sphère, dans une même région (1), l'arc de grand cercle *moindre qu'une demi-circonférence* qui les réunit ne traverse pas la circonférence de grand cercle donnée; au contraire deux points C , D , appartenant à deux régions opposées (1) et (2) par rapport à la circonférence complète considérée étant réunis par un arc moindre qu'une demi-circonférence, cet arc réduit *coupera* cette demi-circonférence; ces faits peuvent d'ailleurs s'interpréter comme traduisant, par images sphériques, les faits correspondants qui se rattachent à la distinction des deux régions de l'espace par rapport à un plan.

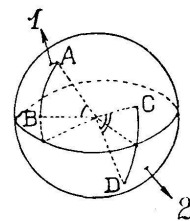


Fig. 50.

Cette notion conduit sans peine (fig. 51), à la trame triangulaire sphérique; si celle-ci est bordée par deux *côtés* réduits, en vertu des propriétés de l'angle trièdre, le troisième sera aussi réduit et deux points quelconques de l'intérieur du triangle seront aussi à distance réduite sur un arc de grand cercle situé à l'intérieur du triangle.

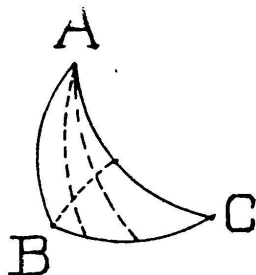


Fig. 51.

Nous nommerons triangle sphérique *propre* un pareil triangle; c'est l'image d'un trièdre dont le sommet est au centre de la sphère.

Nous avons ici un renseignement immédiat sur ces triangles, ceux-ci en effet étant l'image d'un trièdre, nous voyons que dans un triangle propre un côté est plus petit que la somme des deux autres.

On remarquera que les longueurs d'arcs de cercle de rayons égaux sont comparables entre elles au même titre que des longueurs de droites ou des étendues angulaires.

Angles d'un triangle sphérique. La génération (fig. 52), d'un fuseau sphérique par une rotation convenable continue d'une demi-circonférence

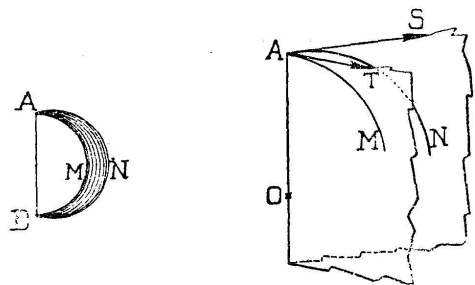


Fig. 52.

tournant autour d'un diamètre est absolument analogue à la rotation du plan autour d'une perpendiculaire au plan, elle permet de définir les angles sphériques par une trame de grands cercles; l'angle sphérique peut d'ailleurs être mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

J. ANDRADE (Besançon).

(A suivre.)

SUR L'ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS

LEMME. — La somme des n fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ étant représentée par la fraction

$$\frac{a_1 b_2 b_3 \dots b_n + a_2 b_1 b_3 \dots b_n + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}, \quad (1)$$

pour que cette dernière fraction soit irréductible, il faut et il suffit que les n fractions données le soient aussi et que leurs dénominateurs soient premiers entre eux deux à deux.

DÉMONSTRATION. 1° *La condition est nécessaire.* En effet, si deux des dénominateurs au moins, b_1 et b_2 par exemple, ou si le numérateur et le dénominateur de l'une des fractions,