V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Soient (sans figure) $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux angles d'un triangle et soient: a et b les côtés respectivement opposés à ces angles; je dis que l'inégalité $\widehat{A} > \widehat{B}$ entraînera comme conséquence l'inégalité $a > b$.

En effet, en comparant a et b, trois cas peuvent seuls se présenter; ou bien 1° : $a < b$, ou bien 2°: $a = b$; ou bien 3° : $a > b$; or le cas de $a < b$ entraînerait, d'après le théorème précédent $A < B$ et le cas de $a = b$ entraînerait comme nous l'avons vu, au début de ces leçons $A = B$. Ces deux suppositions provisoires $a < b$ et $a = b$ entraîneraient donc des conséquences contradictoires avec l'hypothèse; on aura donc bien $a > b$ tout comme on avait d'abord $A > B$.

Remarque. — Ce genre de raisonnement est ce qu'on nomme un raisonnement *par l'absurde*.

IV. — Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a lieu à démonstration que si le côté considéré n'est pas le plus petit de tous, soit alors (Fig. 25) AB > AC. Prolongeons AC d'une longueur CD, de manière que AD = AB, joignons BD; envisageons d'une part le triangle isocèle ABD et d'autre part le triangle CBD. Dans ce dernier, l'angle CBD portion de ABD sera plus petit que celui-ci ou que son égal CDB ; on a donc un triangle CBD dans lequel $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$; on peut donc affirmer, d'après le théorème précédent, que CD < CB; ABAD se composant de AC et de CD sera donc moindre que AC + CB.

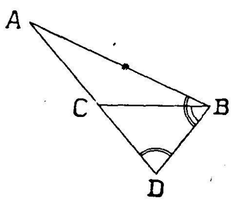

Fig. 25.

V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, les côtés opposés à cet angle dans les deux triangles seront inégaux et dans le même ordre de taille.*

Portons (Fig. 26) le triangle A′B′C′ vers le triangle ABC, de manière à juxtaposer deux côtés égaux A′B′ sur AB et à placer les deux triangles dans une même région de leur plan commun, par rapport à ce côté coïncidant ; soit ABD la nouvelle venue du triangle A′B′C′, soit AX la bissectrice de l'angle formé par les deux autres côtés après ce transport.

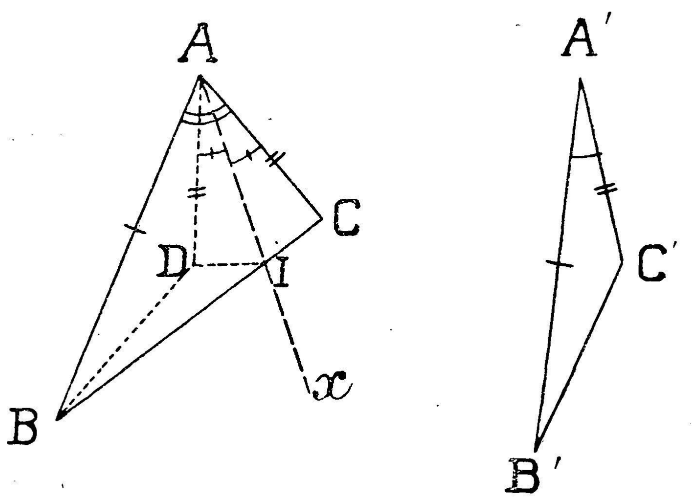

Fig. 26.

Cette bissectrice intérieure au plus grand angle BAC va couper le côté BC en I, joignons ID ; nous formons ainsi deux triangles ADI, AIC, égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puis de l'égalité de ces triangles nous concluons DI = IC.

D'autre part, dans le triangle BDI nous avons, si D n'est pas sur BI,

$$BD < DI + IB \quad \text{ou} \quad BD < BI + IC \quad \text{ou} \quad BC.$$

Si D était sur BI, il serait forcément entre B et I et on aurait BD = BI — ID et à plus forte raison BD < BI + ID.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, mais si leurs troisième côtés sont inégaux, les angles opposés à ces côtés seront aussi inégaux et dans le même ordre de taille.*

Nous démontrerons cette réciproque par la réduction à l'absurde ; soient : b, c, a, les côtés du premier triangle, b', c', a', les côtés du second ; soient A et A′ les angles de ces triangles respectivement opposés aux côtés a et a'.

Nous supposons donnés les renseignements suivants :

$$b = b' \quad c = c' \quad a < a' \ \dots \text{(hypothèses données)}$$

voulant comparer les angles A et A′, nous ne pouvons que faire les suppositions suivantes :

$$1^o\ A > A' ; \quad 2^o\ A = A' ; \quad 3^o\ A < A' ; \text{(hypothèses provisoires)}.$$

Or, d'après le théorème direct la supposition : A $>$ A′ entraînerait : $a > a'$, ce qui n'est pas ; la supposition A $=$ A′ entraînerait : $a = a'$, ce qui n'est pas non plus ; la seule supposition qui reste donc possible est : A $<$ A′.

VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

On appelle angle *trièdre* la figure 27 formée par 3 demi-droites et par les trames angulaires qui les réunissent deux à deux.

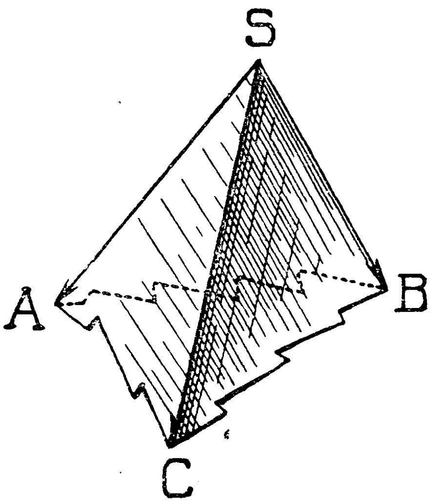

Fig. 27.

Ces trames angulaires portent encore le nom de *faces* du trièdre, leurs intersections ou les demi-droites déjà considérées se nomment les *arêtes* du trièdre.

Deux faces forment sur leur arête commune un angle *dièdre* que l'on nomme : un dièdre du trièdre. Le trièdre, sorte de capuchon, n'est pas une figure fermée ; mais un angle trièdre présente néanmoins certaines analogies avec un triangle ; nous allons par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout angle trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour la face qui n'est pas la plus petite ; dans le plan de cette face qui prolonge le triangle ASB (Fig. 28) reproduisons donc un angle égal à la face adjacente plus petite, à partir de l'arête commune aux deux faces et dans une portion de la plus grande des deux faces ; nous obtenons ainsi l'angle ASD portion de ASB et reproduction de la face ASX ; sur l'arête SX prenons une longueur SC $=$ SD.

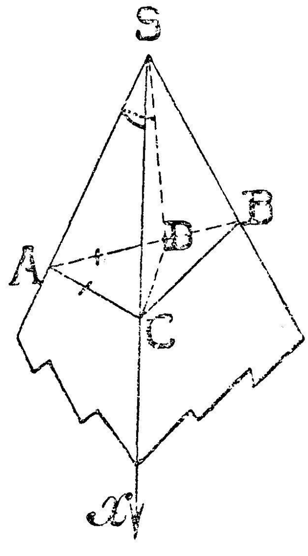

Fig. 28.

Menons CA, CB, CD ; grâce à notre choix des points C et D, les deux triangles ASD et ASC,