SUR LA DÉTERMINATION DES MÉTRIQUES

Autor(en): **Combebiac, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10145

sa valeur. Il en ressentit de la tristesse, sans aucune aigreur. Sa science de prédilection « n'était plus à la mode ».

Mais la mode n'est pas maîtresse du temps. Ce que les contemporains de Mannheim n'ont pas su faire, la postérité le fera, et reconnaîtra en lui l'un des bons ouvriers de la pensée humaine, l'un des savants auxquels ira le plus justement l'hommage des hommes épris de science et de vérité. La renaissance de la Géométrie est inévitable, sinon prochaine. C'est surtout à celui que nous venons de perdre que la gloire en reviendra.

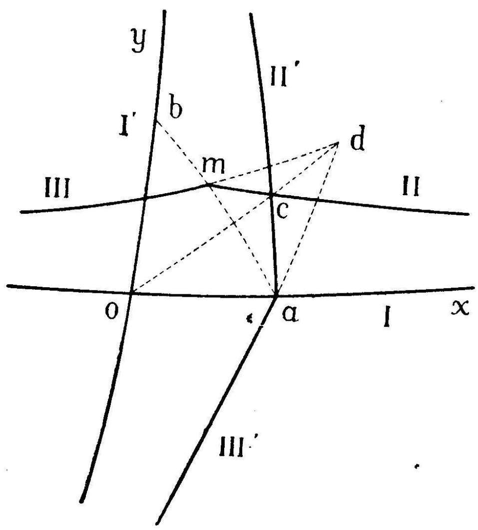
C.-A. LAISANT.

SUR LA DÉTERMINATION DES MÉTRIQUES

I. — Il ne semble pas qu'on ait encore signalé une propriété importante par laquelle la métrique lobatchewskienne se distingue de la Géométrie ordinaire ou métrique euclidienne. Cette propriété consiste dans la possibilité de transporter un segment d'une droite sur une autre au moyen de constructions uniquement projectives, tandis qu'en Géométrie ordinaire il est seulement possible, par ces moyens, de transporter un segment sur une même droite ou sur des droites parallèles entr'elles. Autrement dit, les notions projectives suffisent à établir la métrique lobatchewskienne, tandis qu'elles ne suffisent pas à établir la métrique euclidienne.

On sait que les constructions projectives (ou par alignements) permettent de déplacer un segment sur une même droite ; il suffit donc de montrer comment l'on peut déterminer un segment Ob égal à un segment Oa de même origine mais ayant une direction différente.

En métrique lobatchewskienne comme en métrique ordinaire, les extrémités de segments égaux portés sur deux droites Ox et Oy, à partir d'un même point O, déterminent une correspondance homographique, dans laquelle le point O se correspond à lui même; les droites qui joignent les points correspondants et, en particulier, les points *a* et *b* sont donc concourantes. En métrique ordinaire, le point de concours est à l'infini, comme l'est elle-même la droite qui joint les deux points situés à l'infini sur les deux droites Ox et Oy. En métrique lobatchewskienne, le point de concours est imaginaire et situé sur les deux droites qui joignent deux à deux les *quatre* points situés à l'infini sur Ox et Oy, points qui se correspondent homographiquement. Ces deux dernières droites ne sont pas en général accessibles; mais il est facile de construire une droite concourante avec elles, et passant, par exemple, par le point *a*, extrémité du segment donné. Il suffit, pour cela, de faire appel au théorème de Desargues, qui est le représentant en Géométrie plane de l'axiome d'existence du plan (axiome principal de la Géométrie projective). La construction est la suivante : mener par le point *a* les deux droites II′ et III′ *asymptotiques* à Oy, puis, par le point O, une droite quelconque, et, par les points *c* et *d*, où elle rencontre les deux premières, mener les deux droites II et III asymptotiques à Ox. La droite qui joint le point de rencontre *m* de ces deux dernières au point *a* passe par le point *b*; car les deux triangles formés respectivement par les droites I, II, III et I′, II′, III′ sont homologiques par construction. On peut d'ailleurs vérifier qu'en vertu du théorème de Desargues, le point *b* est bien indépendant du choix de la droite de construction Ocd, en tenant compte du fait que trois droites asymptotiques d'un même côté doivent être considérées comme concourantes.



La différence qui vient d'être établie entre la métrique lobatchewskienne et la métrique euclidienne trouve facilement son explication dans la genèse même des métriques, à la condition toutefois de se placer au point de vue franchement géométrique et, avant tout, d'abandonner la manière de s'exprimer encore employée dans ce paragraphe et qui consiste à désigner, sous le nom de lignes droites, des lignes qui ne présentent aucune particularité individuelle, mais qui forment un ensemble jouissant des mêmes propriétés que l'ensemble des lignes droites. C'est cette genèse géométrique des métriques qui fait l'objet du paragraphe suivant.

II. — Le fondement de la théorie proprement géométrique des métriques réside dans les recherches de Cayley sur les métriques projectives, parmi lesquelles figure la Géométrie ordinaire. Une métrique projective s'obtient en adoptant comme distance de deux points la grandeur définie par la propriété d'être proportionnelle au logarithme du rapport anharmonique déterminé par ces points et par les points d'intersection de la droite qui les joint avec une surface du second ordre prise pour base de la métrique.

Les métriques de Cayley n'épuisent pas les interprétations géométriques dont sont susceptibles les diverses théories édifiées sous le nom de géométries non-euclidiennes.

En effet, si l'on applique aux divers points de l'espace une transformation ponctuelle réelle, continue et n'introduisant aucune singularité, les lignes droites sont transformées en d'autres lignes également simples, s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des mêmes propriétés géométriques que l'ensemble des lignes droites (détermination par deux points et formation de surfaces possédant les mêmes propriétés que les plans). Un tel ensemble de lignes permet de définir des nombres qui présentent toutes les propriétés des rapports anharmoniques et d'établir, par leur intermédiaire, des systèmes de coordonnées en tout semblables aux systèmes de coordonnées projectifs; une surface du second ordre aura pour transformée une surface représentée, dans les nouveaux systèmes de coordonnées ainsi définis, par une équation du second degré. On dispose donc des mêmes éléments qu'en Géométrie projective pour établir, par le procédé même de Cayley, d'autres métriques possédant les mêmes propriétés essentielles que les métriques projectives auxquelles elles correspondent, les lignes droites étant seulement remplacées dans leur rôle par d'autres lignes, que l'on peut appeler les *lignes axiales* des nouvelles métriques.

Ce sont les métriques susceptibles d'être obtenues par le procédé exposé ci-dessus que Sophus Lie a exclusivement visées dans ses recherches sur les axiomes de la Géométrie et qu'il a pu réunir dans une définition commune en les caractérisant par une propriété simple et indépendante de toute notion métrique ou projective. On peut reconnaître d'ailleurs que les systèmes d'axiomes adoptés par les géomètres qui, comme M. Hilbert, se sont placés au point de vue purement logique, définissent au fond ces mêmes métriques.

Il résulte de là qu'une métrique est déterminée par ses lignes axiales et par la surface du second ordre (par rapport à ces lignes) qui joue le rôle de surface fondamentale. On va rechercher dans quelle mesure est réduite l'indétermination, pour les diverses catégories de métriques, par l'introduction d'une nouvelle condition, la condition *archimédienne*.

III. — Les métriques susceptibles d'êtres déduites les unes des autres, c'est-à-dire de l'une d'entr'elles, par l'application de transformations ponctuelles n'introduisant pas de singularité seront dites *semblables*.

On se bornera aux trois catégories de métriques généralement envisagées, savoir :

1° les métriques *hyperboliques*, c'est-à-dire celles qui sont semblables à la métrique projective ayant pour surface fondamentale un ellipsoïde réel, par exemple la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 ;$$

2° les métriques *elliptiques*, c'est-à-dire celles qui sont semblables à la métrique projective ayant pour surface fondamentale un ellipsoïde imaginaire à centre réel, par exemple la sphère imaginaire :

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0 ;$$

3° les métriques *paraboliques*, c'est-à-dire celles qui sont semblables à la Géométrie ordinaire.

Le transport successif d'un segment le long d'une ligne axiale présente des caractères différents dans ces trois catégories.

Dans les métriques hyperboliques ou paraboliques, les points du segment ne peuvent atteindre que les points situés d'un même côté de la surface fondamentale (pour les métriques projectives, ellipsoïde réel ou plan) ; dans les métriques elliptiques, au contraire, on atteint l'infini après un nombre fini d'opérations.

Si l'on appelle *archimédiennes* les métriques, projectives ou non, dans lesquelles le transport d'un segment le long d'une ligne axiale permet d'atteindre un point quelconque de cette ligne et peut, en outre, être répété indéfiniment, on voit que la condition pour qu'une métrique hyperbolique ou parabolique soit archimédienne est que sa surface fondamentale soit rejetée à l'infini.

La Géométrie ordinaire est une métrique parabolique et archimédienne, sa surface fondamentale étant constituée par la surface du second ordre dégénérée qui est définie par le cercle imaginaire du plan de l'infini.

Pour obtenir une métrique qui soit à la fois hyperbolique et archimédienne, c'est-à-dire qui soit justiciable de la théorie logique édifiée par Lobatchewski, il suffit d'appliquer aux points de l'espace une transformation ponctuelle continue qui fasse correspondre l'espace tout entier au volume intérieur à une sphère [1]; cette sphère est alors transformée en une surface rejetée à l'infini, les lignes transformées des lignes droites sont des lignes simples, s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble tel que par un point extérieur à l'une d'elles on peut mener à celle-ci deux lignes *asymptotiques* appartenant à l'ensemble. C'est donc là une propriété caractéristique des métriques à la fois hyperboliques et archimédiennes.

Réciproquement, des lignes simples, s'étendant à l'infini

---

[1] On peut, par exemple, faire correspondre, à tout point M situé à une distance $r\,(< \mathrm{R})$ du centre de la sphère, un point M′ situé sur la droite OM, du même côté de O que M et à une distance r' de O déterminée par

$$\frac{r'}{\mathrm{R}} = \log \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}.$$

dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des mêmes propriétés géométriques que l'ensemble des lignes droites, à l'exception de la propriété de l'unicité de l'asymptotique, sont les lignes axiales d'*une* et d'*une seule* métrique archimédienne, et celle-ci est hyperbolique.

En effet une étude d'un tel ensemble de lignes, calquée sur la Géométrie projective, conduit à considérer les points situés à l'infini sur ces lignes comme appartenant à une même surface du second ordre, c'est-à-dire qu'un tel ensemble de lignes donne lieu à une *surface du second ordre de l'infini*, comme les lignes droites déterminent le plan de l'infini. La seule métrique archimédienne parmi celles qui admettent ces lignes pour lignes axiales est, d'après la condition établie, celle dont la surface fondamentale est la surface de l'infini.

Les métriques paraboliques archimédiennes ne sont pas déterminées par leurs lignes axiales. Elles sont obtenues, en partant de la Géometrie ordinaire, par l'application d'une transformation ponctuelle continue et biunivoque. La propriété de l'unicité de l'asymptotique est conservée et se trouve ainsi caractériser les métriques à la fois paraboliques et archimédiennes ; les lignes axiales déterminent une surface de l'infini qui est du premier ordre (pour les métriques projectives, c'est le plan de l'infini). Mais ces données ne suffisent pas pour déterminer une métrique ; pour les métriques projectives, par exemple, il reste à spécifier la conique imaginaire qui doit jouer le rôle du cercle imaginaire de l'infini. On peut, à cet effet, se donner, par exemple, une des surfaces qui doivent jouer le rôle des sphères. Ces surfaces sont, dans le cas en cause, des ellipsoïdes semblables entr'eux et semblablement placés. Moyennant ces données on pourra transporter un segment sur une droite de direction quelconque, ce qui suffit pour déterminer une métrique.

Enfin, en ce qui concerne les métriques elliptiques, on a vu que le transport d'un segment sur une ligne axiale ne peut pas être répété indéfiniment; mais cela supposait que ces lignes s'étendaient à l'infini. Une métrique elliptique pourrait être archimédienne si ses lignes axiales étaient toutes fermées. Mais il est facile de reconnaître qu'un ensemble de lignes tel qu'il en passe une par deux points quelconques de l'espace comprend forcément des lignes s'étendant à l'infini. C'est ainsi que parmi les cercles orthogonaux à un plan, qui forment, comme on sait, un tel ensemble, figurent les droites parallèles à ce plan. On doit donc conclure que les métriques elliptiques archimédiennes n'ont pas d'existence géométrique, dans notre conception de l'espace. Mais ces métriques s'imposeraient, au contraire, si l'espace venait à être conçu, selon l'idée émise par Riemann, comme une variété numérique fermée[1]. On peut bien ajouter que rien ne permet d'affirmer que cette conception n'est pas celle de l'avenir. G. COMBEBIAC (Bourges).

TABLE D'ÉLÉMENTS RELATIFS A LA BASE 30030 POUR LA RECHERCHE RAPIDE DES FACTEURS PREMIERS DES GRANDS NOMBRES

> La dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.
> GAUSS[1].

I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Pour *reconnaître si un nombre donné est composé ou premier et trouver les facteurs premiers d'un nombre composé,* il n'existe ni de méthode générale, ni de procédé pratique ; on a, il est vrai, quelques procédés applicables à des nombres ayant des formes particulières ; mais il est regrettable de constater que l'on ne soit guère maintenant plus avancé qu'au début du XIX^{me} siècle et que les réflexions, suivantes publiées par GAUSS[2] en 1801, soient malheureusement encore vraies.

« On ne peut s'empêcher de convenir que toutes les mé-
« thodes proposées jusqu'à présent sont restreintes à des cas

---

[1] Ou mieux, si la *continuité géométrique* venait à être assimilée à celle d'une variété numérique fermée.

[2] *Disquisitiones Arithmeticæ,* Lipsiæ, 1801. N° 329. — Cet Ouvrage a été traduit par POULLET-DELISLE sous le titre *Recherches Arithmétiques,* Paris, 1807. P. 416.