

# Deuxième partie.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*tangle*, nous avons  $\delta = 0$  et par suite  $K = \infty$ , ce qui établit la différence essentielle entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne.

### Deuxième partie.

1. En tenant compte du théorème I, nous nous servons du mot *parallèle* en lui attribuant une signification spéciale qui nous permettra de tirer parti de la définition suivante :

*Définition.* — On dit qu'une droite  $D$  est PARALLÈLE à une droite  $\Delta$  quand les deux droites sont dans un même plan et que la première a tous ses points à la même distance de la seconde.

Cette définition se justifie à l'aide du théorème suivant :

*Théorème I.* Si deux droites sont perpendiculaires à une 3<sup>e</sup>, l'une d'elles est parallèle à l'autre.

*Démonstration.* — Dans le plan de la figure 3 considérons

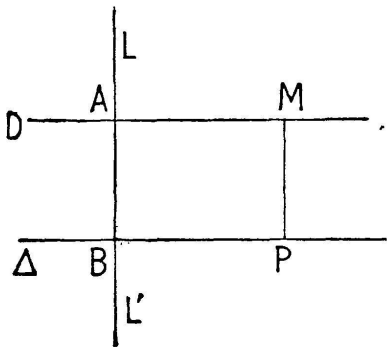


FIG. 3.

deux droites  $D$  et  $\Delta$  respectivement perpendiculaires à la droite  $LL'$ , la première au point  $A$ , la seconde au point  $B$ , nous allons prouver que la droite  $D$  est parallèle à la droite  $\Delta$ , c'est-à-dire, puisqu'elles sont déjà dans le même plan, que les divers points de la droite  $D$  sont à la même distance  $AB = l$  de la droite  $\Delta$ . Soit

un point  $P$  quelconque de la droite  $\Delta$ , menons par ce point, du côté de la droite  $D$  la perpendiculaire  $PM$  à la droite  $\Delta$  et prenons  $PM = BA = l$ . Si on trace  $AM$  on formera un rectangle  $ABPM$  (3, 1<sup>re</sup> partie). Le côté  $AM$  de ce rectangle est par suite perpendiculaire sur  $LL'$  au point  $A$  et par suite se confond avec la droite  $D$  qui est la seule perpendiculaire possible en ce point à la droite  $LL'$ . Le point  $M$  est donc sur la droite  $D$  et sa distance  $MP$  à la droite  $\Delta$  est égale à  $l$  ou  $AB$ . Or dans le rectangle  $ABPM$  on a  $AM = BP$ . On peut donc considérer le point  $M$  comme un point quelconque de la droite  $D$ , puisque le point  $P$  est un point quelconque de  $\Delta$ . Donc :

La droite  $D$  a ses divers points à la même distance  $l$  de la droite  $\Delta$ ; elle est donc parallèle à cette droite. C. Q. F. D.

*Remarque.* — Il est bon d'observer que  $BA$ ,  $PM$ , etc., etc. peuvent être considérées comme des perpendiculaires menées des divers points de  $\Delta$  à la droite  $D$ ; elles ont d'ailleurs toutes la même longueur  $BA = l$ . On voit ainsi, qu'au point de vue de la distance à l'une des deux droites des divers points de l'autre, il y a *réciprocité* entre les deux droites  $D$  et  $\Delta$ .

Il suit de là que : Si la *première* est parallèle à la *seconde*, réciproquement la *seconde* est parallèle à la *première*.

On peut donc, conformément à l'usage, énoncer comme il suit le théorème précédent :

*Théorème I.* — Si deux droites, situées dans le même plan, sont perpendiculaires à une 3<sup>e</sup>, ces droites sont parallèles.

*Corollaire.* — Chacun des segments de droite  $AB$ ,  $MP$ , etc. est à la fois perpendiculaire à la droite  $D$  et à la droite  $\Delta$ , et de plus ils ont la même longueur  $l$ ; on est ainsi conduit à la double propriété suivante :

1<sup>o</sup> Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre ;

2<sup>o</sup> Deux droites parallèles sont partout également distantes.

On fait fréquemment usage de cette double propriété.

2. *Théorème II.* — Si deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles à une même droite  $\Delta$ , ces droites sont parallèles.

*Démonstration.* — Dans le plan de la figure, qui est celui des trois droites, soit  $LL'$  une perpendiculaire quelconque à la droite  $\Delta$ . Cette droite  $LL'$  est perpendiculaire à chacune des droites  $D$  et  $D'$  qui sont parallèles à  $\Delta$ . Donc, en vertu du théorème précédent les droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles.

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Si deux droites parallèles  $D$  et  $D'$  ont un point commun  $M$ , ces droites se confondent.

*Démonstration.* — En effet soit  $LL'$  la perpendiculaire à la droite  $D$  par exemple au point  $M$ , elle est aussi perpendiculaire à sa parallèle  $D'$ . Les deux droites  $D$  et  $D'$  étant perpendiculaires à  $LL'$  au même point  $M$ , se confondent.

C. Q. F. D.

Autrement: Les divers points de  $D'$  par exemple sont, comme le point  $M$ , à une distance nulle de la droite  $D$  et réciproquement; donc ces deux droites ont tous leurs points communs et par suite se confondent.

C. Q. F. D.

3. *Théorème III.* Par un point extérieur à une droite on

peut mener une parallèle à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.

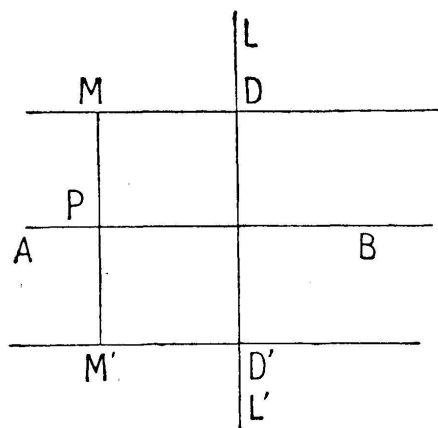


FIG. 4.

*Démonstration.* — Soit  $M$  un point extérieur à la droite  $AB$  (fig. 4). Menons à cette droite une perpendiculaire  $LL'$ , et du point  $M$  menons la perpendiculaire  $MD$  sur  $LL'$ . Cette droite sera parallèle à  $AB$  puisque l'une et l'autre sont perpendiculaires sur  $LL'$ . Donc :

1° On peut mener par le point  $M$  une parallèle à  $AB$ .

Imaginons par le point  $M$  une autre parallèle à  $AB$ ; on aurait deux droites parallèles à  $AB$  et par suite ces deux droites seraient parallèles; mais à cause de leur point commun  $M$  elles se confondraient. Donc :

2° On ne peut mener par le point  $M$  qu'une seule parallèle à la droite  $AB$ .

C. Q. F. D.

*Remarque.* — Soit  $MP = l$  la distance du point  $M$  à la droite  $AB$ : si du même côté de  $AB$  on se donne un point arbitraire du plan, sa distance à la droite  $AB$  sera supérieure à  $l$  s'il est au-dessus de  $MD$ , et inférieure à  $l$  s'il est placé entre  $MD$  et  $AB$ . On voit ainsi que :

La parallèle menée par le point  $M$  à la droite  $AB$  est, d'un côté de cette droite le *lieu* des points qui en sont à la distance  $MP = l$ .

Soit  $M'$  le symétrique du point  $M$  par rapport à la droite  $AB$ . La parallèle  $M'D'$  à cette droite menée par le point  $M'$  est évidemment de l'autre côté de cette droite le *lieu* des points

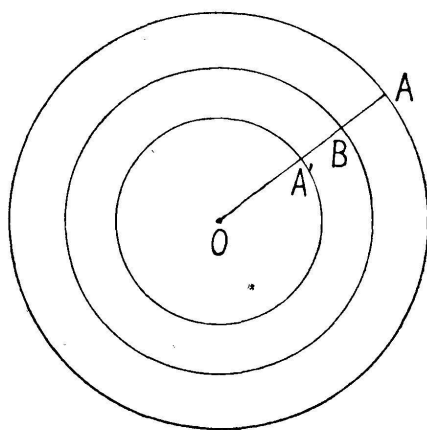


FIG. 5.



qui en sont à la distance  $l$ . Le lieu complet des points situés à la distance  $l$  de la droite AB est donc l'ensemble des deux parallèles MD et M'D'.

Il en résulte immédiatement que le lieu des points équidistants des deux parallèles MD et M'D' est la droite AB, c'est-à-dire la parallèle menée aux deux premières par un point P qui en est équidistant.

Une question analogue se présente quand on considère le lieu des points situés à une distance  $l < R$  d'une circonférence de centre O et de rayon  $OB = R$ . On *augmente* ou on *diminue* chaque rayon, c'est-à-dire chaque *normale* à la courbe d'une même longueur  $l$ . On obtient ainsi deux circonférences de rayon  $OA = R + l$ , et  $OA' = R - l$ , concentriques à la première.

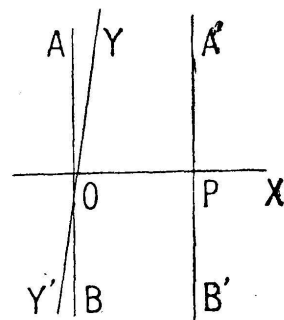


FIG. 6.

De pareilles courbes sont appelées *courbes parallèles*.

Dans l'exemple choisi on peut constater que la circonférence proposée est le lieu des points qui sont situés à la distance  $l$  des deux autres.

*Théorème IV.* — Si deux droites AB et A'B' sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Soit Y'Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O et qui fait avec elle l'angle aigu AOY. Menons au point O la perpendiculaire OX sur AB. Cette droite est perpendiculaire sur A'B', soit P leur point de rencontre. L'angle YOX est le complément de l'angle aigu AOY, donc cet angle est aigu.

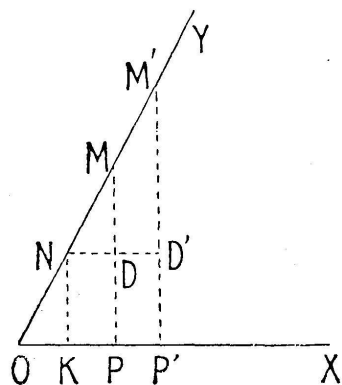


FIG. 7.

Nous sommes donc conduits à démontrer le théorème suivant :

*Théorème V.* — Toute droite perpendiculaire à un côté d'un angle aigu rencontre l'autre.

*Lemme préliminaire.* — Soit (fig. 7) un angle aigu ayant pour côtés les demi-droites OX et OY. Sur le côté OY par exemple prenons un segment ON de longueur  $l$  et soit  $NK = d$  la distance de son extrémité N au côté OX; si l'on

prend sur OY des segments OM, OM', etc. de même origine O et de longueurs

$$2l, 3l, 4l$$

les distances MP, M'P', etc. de leurs extrémités au côté OX seront respectivement

$$2d, 3d, 4d, \text{ etc., etc.}$$

*Démonstration.* — Soit  $OM = 2l$ ; prouvons d'abord que  $MP = 2d$ . Pour cela menons MD perpendiculaire sur MP et par suite parallèle à OX. On observe que dans les deux triangles rectangles MPO et NKO les angles aigus en M et en N ont le même complément: l'angle aigu YOX; donc si on considère les deux triangles rectangles MDN et NKO, on constate qu'ils ont leurs hypoténuses égales,  $MN = NO = l$  et

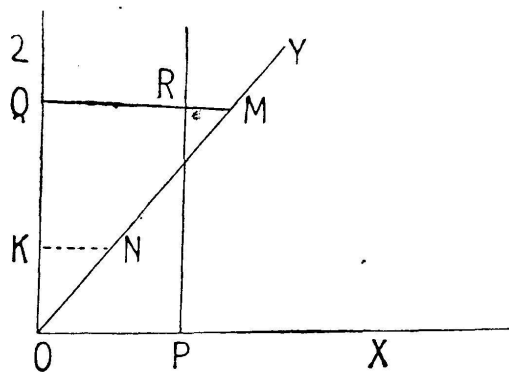


FIG. 8.

un angle aigu égal; donc ces triangles sont égaux et l'on a par suite  $MD = NK = d$ . Mais dans le rectangle MKPD on a  $DP = NK = d$ ; donc  $MP = 2d$ . On verrait de même que si  $OM' = 3l$  on a  $M'P' = 3d$  et ainsi de suite. De sorte que si un segment OM pris sur le côté OY

croît indéfiniment il en sera de même de la distance de son extrémité M à l'autre côté de l'angle aigu. Cela posé soit (fig. 8) un angle aigu YOX, nous allons montrer qu'une perpendiculaire quelconque au côté OX par exemple a deux points de part et d'autre du côté OY. Menons la demi-droite OZ perpendiculaire sur OX, du côté de OY. L'angle ZOY est le complément de l'angle YOX, c'est donc un angle aigu.

Prenons sur OY un segment  $ON = l$  et soit  $NK = d$  la distance de son extrémité N au côté OZ. Sur OX prenons une longueur *arbitraire* OP. Nous aurons soit  $OP = nd$ , soit  $nd < OP < (n + 1)d$ ,  $n$  désignant un nombre entier. Dès lors, si sur OY nous prenons un segment OM égal ou supérieur à  $(n + 1)l$ , ce qui est toujours possible, quelque

grand que soit le nombre entier  $n$ , la distance  $MQ$  du point  $M$  au côté  $OZ$  de l'angle aigu  $ZOY$  sera égale ou supérieure à  $(n + 1) d$ . On aura par suite  $QM > OP$ . Soit sur  $QM$  un segment  $QR = OP$ , le point  $R$  sera entre le point  $Q$  et le point  $M$ . Or la perpendiculaire en  $P$  sur  $OX$  est parallèle à  $OZ$  et, comme à droite de  $OZ$ , c'est le lieu des points situés à la distance  $PO$  de  $OZ$ , elle passe par le point  $R$  situé dans l'angle  $ZOY$ . Donc :

La perpendiculaire en un point quelconque  $P$  au côté  $OX$  a deux points  $P$  et  $R$  de part et d'autre du côté  $OY$ ; donc cette perpendiculaire doit rencontrer  $OY$ . C. Q. F. D.

*Corollaire.* — Si deux droites  $AB$  et  $A'B'$  sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

*Démonstration.* — Soit  $Y'Y$  (fig. 6) une droite qui rencontre  $AB$  au point  $O$ , il faut prouver qu'elle rencontre sa parallèle  $A'B'$ . Pour cela menons en  $O$  la perpendiculaire  $OX$  sur  $A'B'$ . Cette droite qui est aussi perpendiculaire sur  $AB$  fait avec la demi-droite  $OY$  un angle aigu  $YOX$  complémentaire de l'angle aigu  $AOY$ . Soit  $P$  le point de rencontre de  $OX$  avec  $A'B'$ ; la droite  $PA'$  perpendiculaire au côté  $OX$  de l'angle aigu  $YOX$  doit rencontrer le côté  $OY$ .

Donc la droite  $Y'Y$  qui rencontre  $AB$  en  $O$  doit rencontrer sa parallèle  $A'B'$ . C. Q. F. D.

*Remarque.* — L'angle  $P$  est droit et l'angle  $POY$  est aigu; leur somme est donc inférieure à deux droits; si on remplace  $POY$  par son supplément  $POY'$  on aura une somme supérieure à deux droits. La rencontre aura lieu du côté de  $OP$  où cette somme est inférieure à 2 droits.

On appelle *sécante* une droite qui rencontre deux droites parallèles.

#### ANGLES FORMÉS PAR DEUX DROITES PARALLÈLES COUPÉES PAR UNE SÉCANTE.

*Théorème VI.* — Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

1° Deux angles correspondants sont égaux ;

2° Deux angles alternes-internes sont égaux ;

3° Deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

*Démonstration.* — Considérons (fig. 9) les deux parallèles AB et A'B' coupées en C et C' par la sécante SS'. Nous allons prouver d'abord que les angles correspondants  $\widehat{SCB}$  et  $\widehat{SC'B'}$  sont égaux. Pour cela, d'un point arbitraire M de CS menons MP perpendiculaire sur AB et par suite sur sa parallèle A'B' qu'elle rencontre en P'. Les deux triangles rectangles MPC, MP'C' ont un angle aigu commun au point M. Cet angle a pour complément d'une part  $\widehat{SCB}$  et d'autre part  $\widehat{SC'B'}$  ; donc ces deux angles correspondants sont égaux. C. Q. F. D.

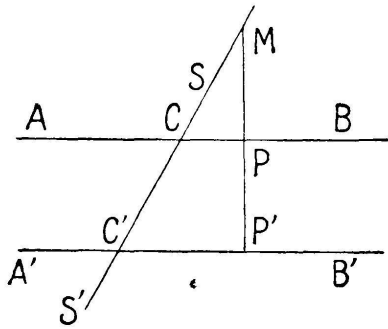


FIG. 9.

Les deux autres parties de l'énoncé sont des conséquences immédiates de la première.

*Théorème VII.* — Réciproquement : Deux droites coupées par une sécante sont parallèles :

1° Si deux angles correspondants sont égaux ;

2° Si deux angles alternes-internes sont égaux ;

3° Si deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

*Démonstration.* — Supposons (fig. 13) que la sécante SS' rencontre en C et C' les deux droites AB et A'B' de manière que les angles correspondants SCB et SC'B' soient égaux. D'un point M de CS menons MP' perpendiculaire sur A'B' et soit P son point de rencontre avec AB. Dans le triangle rectangle MP'C' l'angle en M a pour complément l'angle MC'B'.

Or, par hypothèse  $\widehat{SCB} = \widehat{SC'B'}$  ; donc dans le triangle MPC la somme des angles aigus en M et en C vaut un droit ; donc l'angle P est droit. Donc MP' perpendiculaire sur A'B' est aussi perpendiculaire sur AB. Il en résulte que les droites AB et A'B' perpendiculaires sur une même droite sont parallèles. C. Q. F. D.

Les deux autres réciproques se ramènent à la première.

*Corollaire.* — Si deux angles ont leurs côtés parallèles

deux à deux, soit de même sens, soit de sens contraires, ces angles sont égaux.

Si deux des côtés sont parallèles et de même sens et les deux autres parallèles de sens contraires, les deux angles sont supplémentaires.

Enfin, comme autre conséquence on démontre que :

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ils sont égaux s'ils sont de même nature, et ils sont supplémentaires quand ils sont de nature différente.

TRANSLATION RECTILIGNE D'UNE FIGURE PLANE. COMPOSITION  
DE DEUX TRANSLATIONS.

6. PARALLÉLOGRAMME. — Si on coupe un système de deux droites parallèles  $AB$ ,  $A'B'$ , par deux sécantes parallèles  $AA'$  et  $BB'$ , on forme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles 2 à 2; un tel quadrilatère s'appelle un *parallélogramme*.

On démontre facilement qu'une diagonale  $AB'$  par exemple la partage en deux triangles égaux. On a par suite :  $AB = A'B'$  et  $AA' = BB'$ . Donc :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux 2 à 2. On dit habituellement : Les portions de deux droites parallèles comprises entre parallèles sont égales.

On voit de même que dans un parallélogramme deux angles opposés sont égaux et que deux angles consécutifs sont supplémentaires. Enfin, signalons encore la propriété suivante :

Si dans un quadrilatère deux côtés sont à la fois égaux et parallèles la figure est un parallélogramme.

Cela posé, reportons-nous au début de la *première partie*. Par une translation rectiligne de direction  $\Delta$  le triangle  $MAB$  a passé de sa première position à une 2<sup>e</sup>  $M'A'B'$ . Si on considère les côtés  $AM$  et  $A'M'$  on constate qu'ils forment avec la sécante  $\Delta$  deux angles correspondants égaux  $\widehat{A'} = \widehat{A}$ . Donc  $AM$  et  $A'M'$  sont deux droites parallèles. Il en est de même de  $BM$  et de  $B'M'$ . D'ailleurs, dans le déplacement considéré,

le sommet  $M$  est resté constamment à la même distance  $MP$  de la droite  $\Delta$  ; il a donc décrit un segment de droite  $MM'$  parallèle à la droite  $\Delta$ .

On voit par conséquent que le quadrilatère  $AA'M'M$  est un parallélogramme ainsi que le quadrilatère  $BB'MM'$ .

On a donc  $AA' = MM'$  et de même  $BB' = MM'$ .

Un point quelconque de la figure mobile, non situé sur la directrice  $\Delta$  forme avec le segment  $AB$  de cette droite un triangle invariable analogue au triangle  $MAB$  ; son déplacement s'effectue par conséquent dans les mêmes conditions que celui du point  $M$ . On peut donc énoncer le théorème suivant :

7. *Théorème.* — Dans la translation rectiligne d'une figure plane dans son plan :

1° Les divers points de la figure mobile décrivent des droites parallèles à la directrice  $\Delta$  de la translation et par suite parallèles entre elles ;

2° Quand la figure a été amenée d'une première position à une deuxième ses divers points ont décrit des segments de droites de même longueur ;

3° D'une manière générale : Deux positions quelconques d'un segment de droite, non parallèle à la directrice  $\Delta$ , sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

*Corollaire.* — Quand deux droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles on peut toujours amener l'une d'elles en coïncidence avec l'autre par une translation tout à fait arbitraire.

*Démonstration.* — En effet coupons le système des deux parallèles par deux sécantes parallèles quelconques  $AA'$  et  $BB'$  ; nous obtenons un parallélogramme  $AA'B'B$ . Faisons subir à la droite  $D$  une translation égale et parallèle à  $AA'$  ; le segment  $AB$  se déplacera parallèlement à lui-même et comme  $AA' = BB'$  les points  $A$  et  $B$  viendront simultanément coïncider, le premier avec  $A'$  et le second avec  $B'$  ; dès lors, la droite  $D$  coïncidera avec sa parallèle  $D'$ .

C. Q. F. D.

Certains auteurs invoquent cette propriété pour *définir* le parallélisme de deux droites ; ils utilisent en outre la composition de deux translations rectilignes, propriété par laquelle nous allons terminer cette étude.

8. COMPOSITION DE DEUX TRANSLATIONS RECTILIGNES  
DE DIRECTIONS DIFFÉRENTES.

Par une translation parallèle à la direction  $\Delta$  et de grandeur  $AA'$  un segment de droite  $AB$  de la figure mobile est venu en  $A'B'$ , ce qui donne le parallélogramme  $AA'B'B$ . Par une autre translation de directrice  $\Delta'$  égale à  $A'A''$  le segment de droite  $A'B'$  est venu en  $A''B''$  et on a le parallélogramme  $A'A''B''B'$ .

Or on sait que  $A''B''$  est égal et parallèle à  $AB$ , donc la figure  $AA''B''B$  est également un parallélogramme. On pourra par conséquent par une translation *unique* égale et parallèle à  $AA''$  amener le segment de droite  $AB$  sur  $A''B''$ .

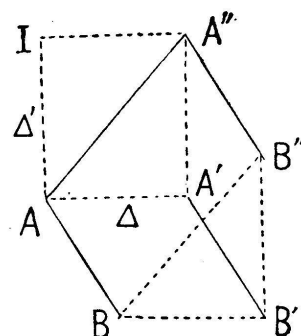


FIG. 10.

Or le déplacement du segment  $AB$  entraîne celui des divers points de la figure et on peut observer que : *La translation unique  $AA''$  est la diagonale du parallélogramme  $AA'A''I$  dont les côtés  $AA'$  et  $AI$  représentent les directions et les grandeurs des translations rectilignes composantes.*

V. HIOUX (Paris).

SUR LES CONGRUENCES DU TROISIÈME DEGRÉ<sup>1</sup>

Dans le chapitre IX de son Etude des fonctions arithmétiques M. Arnoux établit, à l'aide de sa méthode graphique, les propriétés caractéristiques des congruences du troisième degré. Ces propriétés ne sont pas nouvelles, mais je les crois peu connues ; et il ne serait peut-être pas inutile de rappeler qu'elles se déduisent très simplement d'un théorème impor-

<sup>1</sup> A propos du livre de M. G. ARNOUX : « Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques ». — (Voir l'analyse de l'ouvrage dans le précédent n<sup>o</sup>, p. 326-329. *Réd.*).