Exemples d'invariants : Forces quelconques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

En d'autres termes, nous supposons qu'à l'intérieur de cette trajectoire les dérivées partielles $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ soient continues, finies et bien déterminées[1].

Exemples d'invariants : Forces quelconques.

6. Après les considérations générales du chapitre précédent, nous allons signaler d'abord quelques exemples d'invariants relatifs à une trajectoire et valables pour une force quelconque. La recherche des invariants, que nous tenons à citer ici, s'appuie sur le principe suivant. *Une quantité mécanique Q sera certainement un invariant relatif à une trajectoire T, si la quantité Q est égale à un élément géométrique de la courbe de la trajectoire qui a naturellement une valeur unique et bien déterminée en chaque point de la courbe. Il en est de même des quantités Q qui peuvent être exprimées en fonction uniforme de plusieurs éléments géométriques de la trajectoire.* Nous admettons que ces éléments géométriques peuvent avoir plusieurs valeurs en quelques points singuliers de la trajectoire, mais nous excluons toujours toute singularité de la trajectoire qui entraînerait des singularités pour la quantité Q, considérée comme fonction des coordonnées x et y sur la trajectoire ; cela tient à ce que la notion des invariants suppose pour eux une succession de valeurs continue et bien déterminée le long de la trajectoire relative.

Si nous appelons F_n et F_t les composantes normale et tangentielle d'une force agissant sur un point matériel $M(x, y)$, nous avons les formules classiques

$$F_n = m\frac{V^2}{\rho}, \quad F_t = m\frac{dV}{dt},$$

V désignant la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.

Si la masse m est constante ou fonction uniforme des coor-

[1] C'est une conséquence immédiate d'un théorème classique de la théorie des intégrales curvilignes prises le long d'une courbe fermée.

données x et y, ces formules nous donnent les invariants suivants :

$$\frac{V^2}{F_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t} \cdot \frac{dV}{dt},$$

parce que nous àvons :

$$\frac{V^2}{F_n} = \frac{\rho}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}.$$

Si la masse m est une fonction quelconque des coordonnées x et y, nous n'avons que l'invariant $\frac{mV^2}{F_n}$, qui est égal au rayon de courbure de la trajectoire. Ce sont là *des invariants relatifs à toute trajectoire correspondante à des conditions initiales quelconques ; nous faisons exception des trajectoires passant par des points singuliers des quantités considérées* [1].

Forces centrales.

7. Nous allons maintenant présenter un autre invariant beaucoup plus intéressant que les précédents et concernant seulement les forces centrales ; son importance consiste en ce qu'il s'exprime par la force elle-même qui est donnée comme une fonction des coordonnées x et y du mobile, contrairement aux invariants signalés au paragraphe précédent, qui sont exprimés par des composantes de la force suivant la normale et la tangente de la trajectoire. C'est, en effet, un inconvénient d'avoir les invariants exprimés par des composantes de la force qui exigent une certaine connaissance d'une trajectoire, généralement inconnue ; cela tient à ce que nous nous proposons comme but principal des applications des invariants à la recherche géométrique des trajectoires, lorsque la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y.

Le mathématicien Resal a communiqué autrefois à l'Académie des sciences de Paris (Comptes rendus, tome XC ; page 769) un théorème intéressant sur une loi relative à une force centrale. Ce théorème est le suivant :

[1] Ces points singuliers sont les points d'une trajectoire possédant plusieurs rayons de courbure (points multiples à tangentes distinctes ou non).