SUR LE NOMBRE DES TANGENTES QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE

la série de 30 rouges ou 30 noires consécutives n'est pas encore sortie. De fait la probabilité de l'événement est $\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}$ et il y a peu de chances qu'il se produise avant qu'on ait joué un nombre de coups comparable au chiffre 1 073 741 824, disons égal au quotient 1 073 741 824 : 40.

R. DE MONTESSUS

Maître de Conférences à la Faculté Libre des Sciences de Lille.

SUR LE NOMBRE DES TANGENTES

QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE

---

1. — Le problème qui a pour but la détermination du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe algébrique par un point situé sur la courbe se résout d'une manière presque intuitive quand on considère seulement les tangentes réelles, comme on peut voir dans l'ouvrage de Basset, *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901, p. 17). Mais, quand on veut étudier cette question d'une manière générale, en considérant les tangentes réelles et imaginaires, sa résolution est moins facile. C'est à ce point de vue général que s'est placé Salmon dans son ouvrage sur les *courbes planes* (édit. française, Paris, 1884, p. 89), où il a donné à cet égard un théorème important, qu'il a obtenu par une élégante méthode algébrique.

Or, nous allons nous occuper de cette question, en nous plaçant aussi au point de vue algébrique général, pour donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, conduisant par une méthode plus élémentaire au résultat obtenu par l'éminent géomètre anglais.

2. — Soit :

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe considérée et m son degré.

L'équation de sa première polaire, par rapport au point (x_1, y_1), est, comme on le sait, la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_1) = 0 ,$$

et son degré est égal à $m - 1$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant :

Si (x_1, y_1) est un point multiple d'ordre k de la courbe considérée, il est aussi un point multiple de même ordre de sa polaire, et les k branches de la courbe qui se coupent en ce point sont tangentes aux k branches de la polaire qui s'y coupent aussi.

On peut considérer comme compris dans cet énoncé le cas où (x_1, y_1) est un point simple de la courbe, en supposant alors $k = 1$.

Pour démontrer le lemme précédent, écrivons l'équation de la courbe de la manière suivante :

$$f(x_1 + x - x_1 , y_1 + y - y_1) = 0 ,$$

et ensuite développons son premier membre suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$; ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x - x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y - y_1)^2\right] + \ldots = 0 .$$

ou *symboliquement*

$$\sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1}(y - y_1)\right]^{(n)} = 0 .$$

L'équation de la polaire de cette courbe peut être écrite de la manière suivante, en ordonnant aussi son premier membre suivant les puissances de $x-x_1$ et $y-y_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x-x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x-x_1)(y-y_1)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y-y_1)^2\right]+\ldots=0\,,$$

ou *symboliquement*

$$\sum_{n=1}^{n=m}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)\right]^{(n)}=0\,.$$

Ces équations montrent, en premier lieu, que si (x_1, y_1) est un point simple de la courbe considérée, la droite dont l'équation est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_1)+\frac{\partial f}{\partial y_1}(y-y_1)=0$$

est tangente à cette courbe et à sa polaire.

On voit ensuite que, si (x_1, y_1) est un point double de la courbe considérée et si, par conséquent, ses coordonnées x_1 et y_1 satisfont aux équations $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, les deux droites représentées par les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x-x_1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1}(x-x_1)(y-y_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}(y-y_1)^2=0$$

sont tangentes au point (x_1, y_1) à la courbe et à sa polaire.

En continuant de la même manière on démontre le lemme énoncé précédemment.

3. — En nous basant sur le lemme ci-dessus, nous allons déterminer le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe donnée par le point (x_1, y_1).

Supposons d'abord que la courbe a seulement un point multiple, qui coïncide avec (x_1, y_1), et que l'ordre de ce point est égal à k.

La courbe donnée et sa polaire se coupent alors en $m\,(m-1)$ points et l'un de ces points coïncide avec (x_1, y_1).

Or, ce point étant multiple d'ordre k sur la courbe et sur la polaire, il compte pour k^2 intersections. Mais, comme les k branches de la courbe sont tangentes aux k branches de la polaire, chaque branche de celle-là a encore un autre point, consécutif à (x_1, y_1), en commun avec la polaire. Donc le nombre des intersections de la courbe et de sa polaire, distinctes de (x_1, y_1), est égal à

$$m(m-1) - k(k+1) .$$

Or, ces points coïncident avec les points de contact des tangentes à la courbe menées par (x_1, y_1) ; et on a, par conséquent, en représentant le nombre de ces tangentes par t,

$$t = m(m-1) - k(k+1) ,$$

résultat qui coïncide avec celui qui a été obtenu par Salmon.

Si (x_1, y_1) est un point simple, cette formule a encore lieu, en supposant alors $k = 1$.

Si la courbe donnée a δ points doubles et ν points de rebroussement, distincts de (x_1, y_1), la valeur de t peut être encore obtenue facilement, en employant la méthode dont on fait usage habituellement pour démontrer celle des formules de Plücker qui détermine la classe de la courbe (Salmon, *l. c.*, p. 77-78) et le lemme précédemment démontré. On trouve ainsi.

$$t = m(m-1) - 2\delta - 3\nu - k(k+1) .$$

F. Gomes Teixeira (Porto).