

I

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

desquels découlent les théorèmes de CAUCHY sur les intégrales des fonctions monogènes d'une variable complexe.

I

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x , uniforme et finie dans l'intervalle.

$$p < x < q .$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx ,$$

a, b étant deux valeurs situées entre p et q , il faut démontrer, selon RIEMANN¹, que la somme

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

tend vers une limite déterminée, si l'on augmente le nombre $n-1$ des points $x_1, \dots, x_{n-1}$, partageant l'intervalle $a \dots b$ ($a = x_0$, $b = x_n$) en n parties, de manière que l'étendue de chacune des parties devienne aussi petite que l'on veut, et que cette limite soit indépendante du choix des points $x_1, \dots, x_{n-1}$ et des points intermédiaires ξ_{k-1} ,

$$x_{k-1} \leq \xi_{k-1} < x_k .$$

Si l'on forme la somme (2) pour les mêmes points $x_1, \dots, x_{n-1}$, mais, pour deux séries différentes de valeurs intermédiaires ξ_{k-1} et $\bar{\xi}_{k-1}$:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}) ,$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1}) ,$$

¹ Werke, (1892), p. 239.

la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $S_1 - S_2$ devienne aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre n de la dite manière, consiste — comme on sait — en ce que

$$(3) \quad \lim_n \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sigma_{k-1} = 0 ,$$

en désignant par σ_{k-1} l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $x_{k-1} \dots x_k$, c'est-à-dire, la différence entre les valeurs extrêmes, dont la fonction $f(x)$ est capable dans cet intervalle. Quant à la démonstration que cette condition est suffisante pour que les sommes (2), formées avec des séries différentes de points de partition $x_1, \dots, x_{n-1}$, tendent vers une limite commune, elle se fait ordinairement en appliquant le principe de la superposition des partitions, due à CAUCHY¹. Je vais montrer, en m'appuyant à une remarque due à KRONECKER² que l'application du principe mentionné devient superflu, si l'on étend de la manière suivante le sens de la condition (3).

Soient $\zeta_{k-1} \dots \zeta_k$ des intervalles embrassant les intervalles $x_{k-1} \dots x_k$, mais tels que $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ tende vers zéro en même temps que $x_k - x_{k-1}$; ces intervalles plus grands pourront d'ailleurs pénétrer l'un dans l'autre. En désignant alors par σ_{k-1} l'*oscillation* de $f(x)$ dans l'intervalle $\zeta_{k-1} \dots \zeta_k$ et par $\xi_{k-1}, \bar{\xi}_{k-1}$ deux valeurs intermédiaires du même intervalle, la condition (3) continuera d'être nécessaire et suffisante pour que les sommes S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment.

Augmentons maintenant le nombre n des parties $(x_{k-1} \dots x_k)$ selon une loi arbitraire, de manière que ces parties tendent vers zéro, et soient

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \dots$$

les sommes (2), formées pour les partitions successives avec des valeurs intermédiaires quelconques; il faut démontrer

¹ *Résumé des leçons, etc.* (1823), p. 81.

² *Vorlesungen über Integrale* (1894), p. 6-7.

qu'étant δ une petite quantité positive donnée à l'avance, on puisse déterminer le nombre N de manière que l'on ait

$$|S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu}| < \delta$$

pour $\nu > N$ et λ arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_{\nu} S_{n_\nu}$ existe. Puis il faut démontrer que cette limite soit indépendante de la manière, dont le nombre n a été augmenté. Soient donc $x_1, \dots, x_{n-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$, et $x_1, \dots, x_{m-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \dots, \xi_{m-1}$, deux partitions, et

$$S = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}),$$

$$T = \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

les sommes correspondantes, il suffira d'établir que la différence $T-S$ tende vers zéro, si l'on fait croître n et m de manière que les différences $x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$) et $x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, m$) deviennent infiniment petites. A cet effet, désignons par $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+m-2}$ les valeurs x_k et x_k , rangées par ordre croissant, et soit l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_\lambda$ contenu dans l'intervalle $x_{\lambda_i-1} \dots x_{\lambda_i}$ et dans l'intervalle $x_{\lambda_k-1} \dots x_{\lambda_k}$; alors il est évident que nous aurons :

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_i-1}),$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_k-1}).$$

Mais écrites de telle manière, les sommes S et T rentrent sous la forme des sommes S_1, S_2 prises dans le sens étendu, parce qu'en réunissant les intervalles $x_{\lambda_i-1} \dots x_{\lambda_i}$ et $x_{\lambda_k-1} \dots x_{\lambda_k}$, on obtient un intervalle $\zeta_{\lambda-1} \dots \zeta_\lambda$ qui contient les points ξ_{λ_i-1}

et $\bar{\xi}_{\lambda-k-1}$, embrasse à la fois l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$ et devient infiniment petit en même temps que $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$. La condition (3) est donc suffisante pour que S et T tendent vers une limite commune, *c. q. f. d.*

Il est évident que cette condition se trouve satisfaite, — aussi dans le sens étendu, — si $f(x)$ est une fonction continue, au sens de CAUCHY, dans l'intervalle $p \dots q$.

II

Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions des variables réelles ξ, η qui, à l'intérieur d'un domaine S simplement connexe du plan des (ξ, η) , sont uniformes et finis et admettent des dérivées partielles par rapport à ξ et η . Si la condition d'intégrabilité.

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

se trouve satisfaite à l'intérieur de S, l'équation différentielle

$$(2) \quad du = Pd\xi + Qd\eta$$

possède une solution u qui est une fonction des deux variables indépendantes ξ, η uniforme à l'intérieur de S, et qui s'évanouit pour un point (ξ_0, η_0) de S, donné arbitrairement. C'est ce que nous allons démontrer, sans faire usage des notions de l'intégrale curviligne et de l'intégrale double ; au contraire, notre démonstration nous va permettre de démontrer d'une manière extrêmement simple les théorèmes classiques, relatifs aux intégrales curvilignes. Nous allons procéder suivant EULER ¹.

1. Soient (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points de S, tels que le rectangle déterminé par les points (ξ_0, η_0) , (ξ, η_0) , (ξ, η) , (ξ_0, η) — qui seront désignés aussi par A, B, C, D — se trouve entièrement à l'intérieur de S. Nous considérons les deux expressions

¹ Voir *Institutiones calculi integralis*, t. I, caput II, art. 448 et suiv.