

SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Autor(en): **Nielsen, Niels**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8438>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. — Supposons n positif entier, puis posons

$$(1) \quad \cos(n\varphi) = a_{n,0}(\cos\varphi)^n + a_{n,2}(\cos\varphi)^{n-2} + a_{n,4}(\cos\varphi)^{n-4} + \dots$$

HEINE¹ a déterminé les coefficients $a_{n,2p}$ en appliquant, pour

$$x = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

la série de puissances ordinaire qui représente $\log(1+x)$. Les mêmes coefficients et les coefficients de quelques développements analogues sont déterminés par YVON DE VILLARCEAU² qui a appliqué les propriétés différentielles des fonctions trigonométriques et sa méthode a été modifiée par CATALAN³.

En étudiant pour le moment les fonctions sphériques généralisées, j'ai trouvé une détermination tout à fait élémentaire de tous les coefficients susdits, et cela en m'appuyant seulement sur la formule binomiale à exposant positif entier et sur la série géométrique ordinaire.

A cet effet, nous avons à partir de l'identité

$$(2) \quad \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} :$$

posons d'abord

$$q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

puis

$$q = x(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

¹ *Mathematische Annalen*, t. II, p. 187, 1870.

² *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469-1471, 1876.

³ *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. II, p. 529-536, 1883.

nous aurons, en additionnant puis soustrayant les formules ainsi obtenues, ces deux autres

$$(3) \quad \frac{1 - x \cos \varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = 1 + x \cos \varphi + x^2 \cos 2\varphi + \dots + x^n \cos(n\varphi) + x^{n+1} Q$$

$$(4) \quad \frac{x \sin \varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + \dots + x^n \sin(n\varphi) + x^{n+1} Q_1,$$

où Q et Q_1 désignent des quantités qui resteront finies pour $x = 0$.

Cela posé, mettons encore dans (2)

$$q = 2x \cos \varphi - x^2,$$

nous aurons de même

$$(5) \quad \frac{1}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = 1 + x(2 \cos \varphi - x) + x^2(2 \cos \varphi - x)^2 + \dots + x^n(2 \cos \varphi - x)^n + x^{n+1} Q_2,$$

où Q_2 est fini pour $x = 0$.

Ordonnons maintenant suivant les puissances positives entières de x les premiers termes du second membre de (5), nous aurons à chercher le coefficient de x^r obtenu du terme

$$x^{r-p} (2 \cos \varphi - x)^{r-p}, \quad 2p \leq r,$$

pour lequel la formule binomiale donnera immédiatement cette expression :

$$(-1)^p \binom{r-p}{p} (2 \cos \varphi)^{r-2p},$$

de sorte que nous obtenons, en vertu de (5), une nouvelle identité de cette forme

$$(6) \quad \frac{1}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = 1 + A_1 (\cos \varphi) x + A_2 (\cos \varphi) x^2 + \dots + A_n (\cos \varphi) x^n + x^{n+1} Q_3,$$

où Q_3 restera fini pour $x = 0$, tandis que nous avons posé pour abrégé

$$(7) \quad A_r (\cos \varphi) = (2 \cos \varphi)^r - \binom{r-1}{1} (2 \cos \varphi)^{r-2} + \binom{r-2}{2} (2 \cos \varphi)^{r-4} - \dots$$

Multiplions maintenant par $x \sin \varphi$ les deux membres de (6), il résulte, en vertu de (4), une identité de cette forme

$$(8) \quad x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \dots + x^n \sin n\varphi = x^2 A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi + x^3 A_2 (\cos \varphi) \sin \varphi + \dots + x^n A_{n-1} (\cos \varphi) \sin \varphi + x^{n+1} Q_4,$$

où Q_4 restera fini pour $x=0$. Divisons ensuite par x^2 les deux membres de (8), puis mettons $x=0$, il résultera

$$\sin 2\varphi = A_1 (\cos \varphi) \sin \varphi,$$

d'où en divisant par x^3 l'identité nouvelle obtenue de (8) en supprimant le premier terme de ses deux membres, l'hypothèse $x=0$ donnera de nouveau

$$\sin 3\varphi = A_2 (\cos \varphi) \sin \varphi,$$

et ainsi de suite. Nous aurons généralement

$$(9) \quad \sin n\varphi = A_{n-1} (\cos \varphi) \cdot \sin \varphi.$$

Cela posé, multiplions par $1 - x \cos \varphi$ les deux membres de (6), puis comparons avec (3) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en suivant le même procédé, l'autre formule générale analogue à (9):

$$(10) \quad \cos n\varphi = A_n (\cos \varphi) - A_{n-1} (\cos \varphi) \cdot \cos \varphi.$$

Or, la formule (10) nous permet de déterminer les coefficients $a_{n,2r}$ figurant au second membre de (1); nous aurons en effet, pour $r > 0$,

$$a_{n,2r} = (-1)^r \binom{n-r}{r} 2^{n-r} - (-1)^r \binom{n-r-1}{r-1} \cdot 2^{n-2r-1},$$

d'où, après une simple réduction

$$(11) \quad a_{n,2r} = (-1)^r \frac{2n-r}{r} \cdot \binom{n-r-1}{r-1} \cdot 2^{n-2r-1},$$

tandis que nous trouverons particulièrement, pour $r=0$,

$$(11 \text{ bis}) \quad a_{n,0} = 2^{n-1}$$

Pour déduire d'autres formules fondamentales, mettons

dans (9) (10) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ , nous aurons pour n pair, en mettant $2n$ au lieu de n :

$$(12) \quad \sin(2n\varphi) = (-1)^n [A_{2n-1}(\sin \varphi) \cdot \cos \varphi] .$$

$$(13) \quad \cos(2n\varphi) = (-1)^n [A_{2n}(\sin \varphi) - A_{2n-1}(\sin \varphi) \sin \varphi] ,$$

et pour n impair, en mettant $2n+1$ au lieu de n :

$$(12 \text{ bis}) \quad \sin(2n+1)\varphi = (-1)^n [A_{2n+1}(\sin \varphi) - A_{2n}(\sin \varphi) \sin \varphi]$$

$$(13 \text{ bis}) \quad \cos(2n+1)\varphi = (-1)^n A_{2n}(\sin \varphi) \cos \varphi .$$

Cela posé, remarquons ensuite que le produit

$$P_n = \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

s'évanouira pour $x = \frac{p\pi}{n}$, où p désigne un nombre entier quelconque, puis appliquons l'identité

$$\sin \left(x + \frac{p\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{(n-p)\pi}{n} \right) = \sin \left(\frac{p\pi}{n} + x \right) \sin \left(\frac{p\pi}{n} - x \right) ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin \left(x + \frac{p\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{(n-p)\pi}{n} \right) = \sin^2 \frac{p\pi}{n} - \sin^2 x ,$$

il est évident que P_n est un polynome entier de $\sin x$, abstraction faite du facteur $\cos x$ dans le cas, où n est pair; c'est-à-dire que P_n est une expression complètement de la même nature que le second membre de (12) et (12 bis) si nous y remplaçons φ par x ; de plus P_n s'évanouira pour les mêmes valeurs de $\sin x$ que $\sin(nx)$, d'où il résulte une identité de cette forme

$$(14) \quad \sin x = \alpha_n \cdot \sin \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{x+\pi}{n} \cdot \sin \frac{x+2\pi}{n} \dots \sin \frac{x+(n-1)\pi}{n} ,$$

où α_n désigne un facteur indépendant de x .

Pour déterminer maintenant la valeur de α_n divisons d'abord

par x les deux membres de (14), puis posons $x = 0$, nous aurons

$$(15) \quad n = \alpha_n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$$

tandis que l'hypothèse $x = \frac{\pi}{2}$ donnera de même

$$(16) \quad 1 = \alpha_n \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

d'où en multipliant (15) (16)

$$2n = 2\alpha_n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

ce qui donnera, en vertu de (15),

$$(17) \quad \alpha_{2n} = 2\alpha_n^2.$$

Cela posé, mettons dans (15),

$$\sin \frac{2p\pi}{n} = 2 \cos \frac{p\pi}{2n} \sin \frac{p\pi}{2n} = 2 \sin \frac{p\pi}{2n} \sin \frac{(n+p)\pi}{2n},$$

nous aurons de même

$$n = \alpha_n \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{2n}{\alpha_{2n}},$$

ou bien,

$$\alpha_{2n} = 2^n \cdot \alpha_n,$$

d'où, en vertu de (17),

$$\alpha_n = 2^{n-1};$$

car la valeur $\alpha_n = 0$ est impossible ici; nous avons ainsi démontré cette autre formule générale

$$(18) \quad \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{x}{n} \sin \frac{x+\pi}{n} \sin \frac{x+2\pi}{n} \dots \sin \frac{x+(n-1)\pi}{n},$$

tandis que les formules (15) (16) donnent ces résultats numériques

$$(19) \quad \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$(19 \text{ bis}) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

II. — Pour donner une application des dernières formules que nous venons de développer, cherchons le discriminant Δ_n de cette équation algébrique

$$(20) \quad a_{n,0}x^n + a_{n,2}x^{n-2} + a_{n,4}x^{n-4} + \dots = \omega ,$$

où ω est une quantité donnée, tandis que les coefficients $a_{n,2p}$ sont les mêmes qui figurent dans (1).

A cet effet, désignons par α un des angles qui satisfont à l'égalité

$$\cos \alpha = \omega ,$$

de sorte que α deviendra imaginaire, quand ω n'est pas égal à une quantité réelle, telle que $-1 \leq \omega \leq +1$; mais, en tous cas, toutes les racines de (20) deviendront

$$\cos \frac{\alpha}{n}, \cos \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \dots, \cos \frac{\alpha + (2n-2)\pi}{n} .$$

Cela posé, nous trouverons $\pm \sqrt{\Delta_n}$ égale au produit de tous les facteurs de la forme

$$(21) \quad \cos \frac{\alpha + 2p\pi}{n} - \cos \frac{\alpha + 2q\pi}{n} = 2 \sin \frac{(q-p)\pi}{n} \cdot \sin \frac{\alpha + (p+q)\pi}{n} ,$$

où $q > p$, et où $0 \leq p \leq n-2$, $1 \leq q \leq n-1$. Or, le nombre de facteurs possibles de la forme (21) étant $\frac{n(n-1)}{2}$, nous aurons évidemment

$$(22) \quad \Delta_n = 2^{n(n-1)} \cdot P_1^2 \cdot P_2^2 ,$$

où P_1 et P_2 désignent les produits de tous les facteurs possibles de ces formes

$$\sin \frac{(q-p)\pi}{n} \quad \text{respectivement} \quad \sin \dots \frac{\alpha + (q+p)\pi}{n} ;$$

c'est-à-dire que nous aurons d'abord

$$P_1 = \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^{n-1} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{n-2} \dots \left(\sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)^1 ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P_1 = \left(\sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)^{n-1} \left(\sin \frac{(n-2)\pi}{n} \right)^{n-2} \dots \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^1 ;$$

car nous avons toujours

$$\sin \frac{(n-p)\pi}{n} = \sin \frac{p\pi}{n} .$$

Multiplions ensuite les deux expressions ainsi obtenues pour P_1 , il résultera, en vertu de (19),

$$(23) \quad P_1^2 = \left(\frac{n}{2^{n-1}} \right)^n .$$

La détermination du produit P_2 est un peu plus difficile, parce qu'il faut considérer séparément les deux cas, où n est pair ou impair.

1° n impair, savoir $n = 2r + 1$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r + 1 \leq 4r - 1$, où

$$s = 1, 2, 3, \dots, 2r ,$$

précisément pour r combinaisons des valeurs possibles de p et q ; on aura en effet pour s pair

$$p + q = s \text{ pour } \begin{cases} q = s, s-1, s-2, \dots, \frac{s}{2} + 1 \\ p = 0, 1, 2, \dots, \frac{s}{2} - 1 \end{cases}$$

et de même, pour $s \leq 2r - 2$,

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} q = 2r, 2r-1, 2r-2, \dots, r + \frac{s}{2} + 1 \\ p = s+1, s+2, s+3, \dots, r + \frac{s}{2} , \end{cases}$$

tandis que le cas; où s est impair donnera de même

$$p + q = s \text{ pour } \begin{cases} q = s, s-1, s-2, \dots, \frac{s+1}{2} \\ p = 0, 1, 2, \dots, \frac{s-1}{2} \end{cases}$$

et, pour $s \leq 2r - 3$

$$p + q = s + 2r + 1 \text{ pour } \begin{cases} p = 2r, 2r - 1, \dots, r + \frac{s+1}{2} + 1 \\ q = s + 1, s + 2, \dots, r + \frac{s-1}{2}, \end{cases}$$

et voilà la démonstration de notre énoncé.

Cela posé, nous aurons évidemment

$$P_2 = \pm \left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha + \pi}{n} \dots \sin \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n} \right)^{\frac{n-1}{2}},$$

d'où, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{2^{n-1}} \right)^{n-1};$$

or, la définition de α donnera

$$\sin^2 \alpha = 1 - \omega^2,$$

d'où finalement, en vertu de (22) et (23), pour n impair

$$(24) \quad \Delta_n = \frac{n^n (1 - \omega^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{(n-1)^2}}.$$

2° n pair, soit $n = 2r$; je dis que la somme $p + q$ peut avoir une des deux valeurs s ou $s + 2r \leq 4r - 3$, où

$$s = 1, 2, 3, \dots, 2r - 1,$$

pour r respectivement $r - 1$ combinaisons de valeurs possibles de p et q , selon que s est supposé impair ou pair. On aura en effet pour $p + q = s$ les mêmes solutions que dans 1°, mais pour $p + q = s + 2r$, où $s \leq 2r - 3$, les solutions suivantes, savoir pour s pair

$$q = 2r - 1, 2r - 2, \dots, r + \frac{s}{2} + 1$$

$$p = s + 1, s + 2, \dots, r + \frac{s}{2} - 1$$

et pour s impair

$$q = 2r - 1, 2r - 2, \dots, r + \frac{s+1}{2}$$

$$p = s + 1, s + 2, \dots, r + \frac{s-1}{2},$$

ce qui donnera r respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha + \pi}{n} \dots \sin \frac{\alpha + (n-1)\pi}{n} \right)^n}{\left(\sin \frac{\alpha}{n} \sin \frac{\alpha + 2\pi}{n} \dots \sin \frac{\alpha + (n-2)\pi}{n} \right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin \alpha)^n}{2^{(n-1)^2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{(1 - \omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2} (1 - \omega)} ,$$

de sorte que nous obtenons pour n pair

$$\Delta_n = \frac{n^n (1 - \omega^2)^{\frac{n}{2} - 1} (1 + \omega)}{2^{(n-1)^2}} .$$

NIELS NIELSEN (Copenhague).

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$(1) \quad x = F(x)$$

dont on connaît une solution approchée x_0 , formons les quantités x_v suivant la formule

$$(2) \quad x_{v+1} = F(x_v) \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

x_n sera une valeur approchée de la racine x , si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1} .$$