

UN THÉORÈME SUR LE TRIANGLE

Autor(en): **Kariya, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7556>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

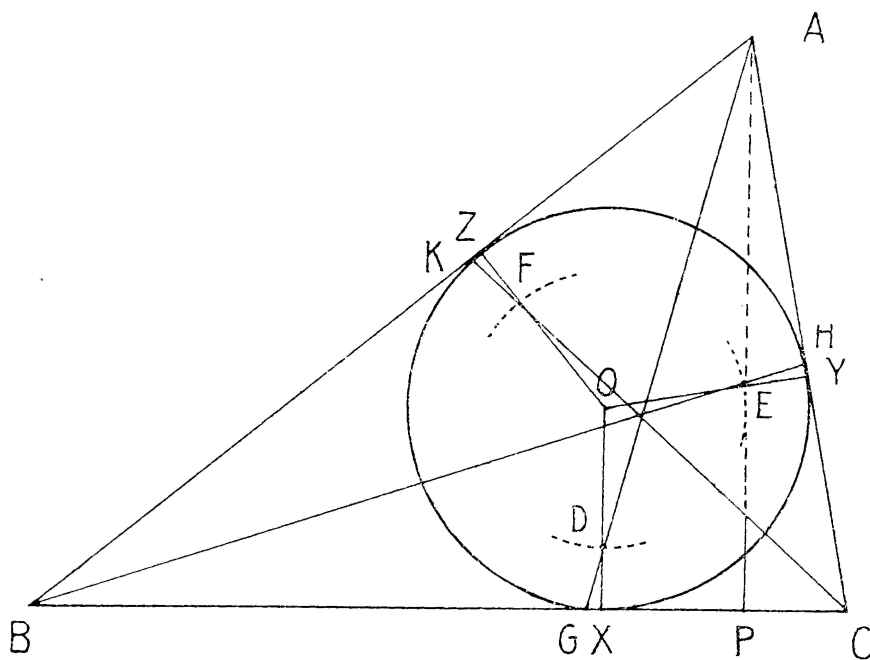
Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

UN THÉORÈME SUR LE TRIANGLE

Voici un théorème que je crois nouveau ; il comprend comme cas particulier des théorèmes déjà connus.

THÉORÈME. — Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés BC, CA, AB . Si l'on prend sur



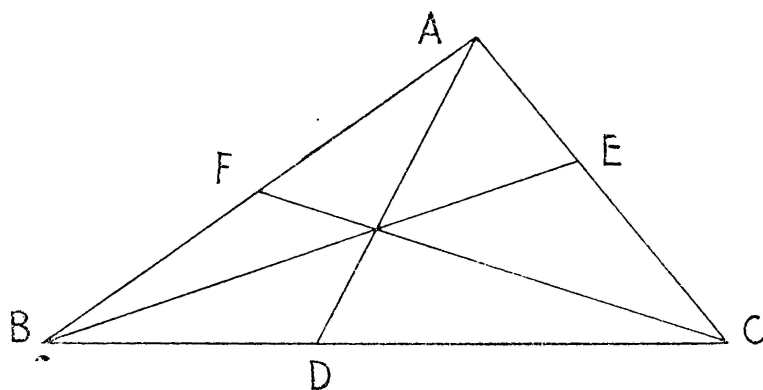
les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O , les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point que je me permettrai d'appeler le « Point de Kariya. »

DÉMONSTRATION. — Ni la géométrie analytique, ni la géométrie élémentaire ne me donnent d'une façon intéressante la démonstration de ce théorème. J'établis celle-ci de la manière suivante :

Si dans un triangle
donné ABC, on a

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$$

les trois droites AD,
BE, CF concourent
en un même point.



Posons

$$\begin{aligned} BC &= a & a + b + c &= 2s \\ CA &= b & OX = OY = OZ &= r \\ AC &= c & OD = OE = OF &= k \\ & & (k \text{ étant une longueur donnée}). & \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$\begin{aligned} BX &= BZ = s - b, \\ CX &= CY = s - c, \\ AY &= AZ = s - a. \end{aligned}$$

Si je prolonge les droites AD, BE, CF jusqu'aux points G, H, K où elles rencontrent les côtés BC, CA, AB, et si j'abaisse de chaque sommet la perpendiculaire sur le côté opposé, j'obtiens alors, en vertu des triangles semblables AGP et DGX

$$\frac{AP}{DX} = \frac{GP}{GX}, \quad \text{ou} \quad \frac{AP - DX}{DX} = \frac{GP - GX}{GX},$$

$$GX = \frac{GP - GX}{AP - DX} DX.$$

Mais

$$\begin{aligned} AP &= 2\Delta_{ABC} : a & DX &= r - k \\ GP - GX &= s - c - b \cos C = b + c \cos B - s \\ GX &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s). \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} HY &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{b} - (r - k)} (s - c - a \cos C) \\ KZ &= \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{c} - (r - k)} (s - a - b \cos A). \end{aligned}$$

Finalement on a

$$BG = BX - GX = (s - b) - \frac{r - k}{\frac{2\Delta}{a} - (r - k)} (b + c \cos B - s)$$

$$= (s - b) \frac{2\Delta}{2\Delta - a(r - k)} - \frac{ac(r - k) \cos B}{2\Delta - a(r - k)}$$

$$\left. \begin{aligned} BG = BX - GX &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k) \cos B}{2\Delta - a(r - k)} \\ CH = CY + HY &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k) \cos C}{2\Delta - b(r - k)} \\ AK = AZ - ZK &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k) \cos A}{2\Delta - c(r - k)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} GC = CX + GX &= \frac{2\Delta(s - c) - ba(r - k) \cos C}{2\Delta - a(r - k)} \\ AH = AY - HY &= \frac{2\Delta(s - a) - bc(r - k) \cos A}{2\Delta - b(r - k)} \\ BZ = BK - KZ &= \frac{2\Delta(s - b) - ac(r - k) \cos B}{2\Delta - c(r - k)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On a évidemment

$$BG \cdot CH \cdot AK = CG \cdot AH \cdot BK :$$

c'est-à-dire que les trois droites AD, BE, CK concourent en un même point.

COROLLAIRE 1. — Prenons $k = \infty$. Dans ce cas, les droites sont perpendiculaires aux côtés opposés et on a le théorème :

Les trois perpendiculaires abaissées de chaque sommet d'un triangle sur les côtés opposés concourent en un même point.

COROLLAIRE 2. — Prenons $k = r$. Les trois droites AX, BY, CZ concourent en un même point.

COROLLAIRE 3. — Prenons $k = -r$. On mesure la longueur en sens opposé.

Les deux derniers cas particuliers fournissent des théorèmes que l'on trouve ordinairement dans la géométrie moderne.

J. KARIYA (Tokio).