

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ DES NOMBRES

Autor(en): **Ripert, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7552>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES
CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ DES NOMBRES

Les Traités d'Arithmétique font connaître les caractères de divisibilité d'un nombre par 2 ou 5 et leurs puissances, par 3 ou 9, enfin par 11. Mais ils n'indiquent aucun caractère de divisibilité par les nombres 7, 13, 17, ..., *a fortiori* par un nombre quelconque, pair ou impair, premier ou non.

Il existe cependant une règle générale, aussi simple d'énoncé que de démonstration et d'application. En outre, on peut faire correspondre à chaque diviseur donné une infinité de caractères de divisibilité, rentrant tous dans une formule générale de laquelle on peut déduire un moyen rapide de reconnaître si un nombre donné est premier ou décomposable en facteurs.

Ces résultats, en admettant même qu'ils ne soient pas nouveaux, sont peu connus et il ne sera peut-être pas inutile d'y insister. « La divisibilité est l'un des chapitres intéressants de l'Arithmétique, mais que celle-ci ne peut étudier que dans ses parties les plus élémentaires » (*La Mathématique*, p. 33). Il n'est donc pas sans intérêt de montrer qu'il serait possible de faire, même dans l'enseignement élémentaire, une plus large place à l'étude de la divisibilité.

§ I. — Soit un nombre $N = 10D + u$, où je puis supposer $u \neq 0$, car l'examen des divisibilités de $10D$; se ramènerait à celui des divisibilités de D ; par suite, un diviseur $n = 10\delta + i$ ne sera à examiner que si $i \neq 0$.

On peut reconnaître immédiatement, par les règles ordinaires, si N est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8 ou 9. A ces règles, j'ajoute d'abord la suivante, très élémentaire.

Un nombre N est divisible par 7 si la différence entre le nombre D de ses dizaines et le double du chiffre u de ses unités est nulle ou divisible par 7.

En effet l'identité

$$N \equiv 7(D + u) + 3(D - 2u)$$

montre que si N est divisible par 7, $D - 2u$ l'est également, et rend évidente la divisibilité par 7 dans le cas de $D = 2u$. Ainsi, 84 est divisible par 7, à cause de $8 - (2 \times 4) = 0$; 1883 l'est à cause de $188 - (2 \times 3) = 182$ [mult. de 7, car $18 - (2 \times 2) = 2 \times 7$].

Ceci posé, admettant que les divisibilités d'un nombre donné par des nombres d'un seul chiffre ont été examinées, je considère la divisibilité du nombre $N = 10D + u$ par le nombre $n = 10\delta + i$, en supposant $D, \delta, u, i \neq 0$.

THÉORÈME. *Le nombre N est divisible par le nombre n si l'on a*

$$(1) \quad \Delta = Di - \delta u = \text{multiple de } u.$$

C'est ce que rend évident l'identité

$$(2) \quad Ni - nu \equiv 10\Delta.$$

Remarques. 1. La condition (1) est nécessaire et suffisante si $\Delta \neq 0$. Si $\Delta = 0$, elle peut n'être pas suffisante; par exemple, bien que $N = 147$ ne soit pas divisible par $n = 63$, on a, pour ces nombres, $\Delta = 0$. Mais remarquons que, si N est divisible par n avec $\Delta = 0$, (1) et (2) donnent (q étant entier et plus grand que 1, à cause de $N > n$):

$$(3) \quad \frac{D}{\delta} = \frac{u}{i} = \frac{N}{n} = q.$$

Or, u ne peut être divisible par i que si $i = 1, 2, 3$ ou 4. Si $i = 1$, on a $N = nu$, et N est toujours, dans ce cas, divisible par n . Si $i = 2, 3$ ou 4, on a $u = (4, 8), (6, 9)$ ou 8; par suite $q = (2, 4), (2, 3)$ ou 2. Ainsi, N ne peut être divisible par n avec $\Delta = 0$ ($i > 1$) que s'il est le double, le triple ou

le quadruple de n , ce qui a été préalablement reconnu en essayant les diviseurs d'un seul chiffre.

2. Si $\delta = 0$, la condition (1) devient $\Lambda = Di = \text{mult. de } i$. Elle est toujours remplie ; c'est ce qui a nécessité l'établissement d'une condition particulière de divisibilité par 7.

On aurait pu déduire cette condition de la condition générale (1), car, en écrivant $7 = 10 \times 1 - 3$, (1) donne pour condition de divisibilité par 7

$$3D + u = \text{mult. de } 7$$

et cette seconde forme entraîne celle déjà indiquée par suite de l'identité

$$N \equiv D - 2u + 3(3D + u).$$

3. On peut prendre, pour D et δ , les nombres de centaines, de milles, ... de N et n , si n a plus de 2, 3, ... chiffres ; u et i sont alors les nombres formés par les 2, 3, ... derniers chiffres. Ainsi 41989 est divisible par 211, soit à cause de $4198 \times 1 - 21 \times 9 = 19 \times 211$, soit à cause de $419 \times 11 - 2 \times 89 = 21 \times 211$.

RÈGLE PRATIQUE. *Pour reconnaître si un nombre N (non divisible par 10) est divisible par un nombre n (de deux chiffres au moins), on sépare, dans N et n , un même nombre de chiffres à partir de la droite, en laissant au moins un chiffre significatif à la gauche de n . Si la différence entre le produit de la partie de gauche de N par la partie de droite de n et le produit de la partie de droite de N par la partie de gauche de n est un multiple de n , N est divisible par n .*

§ II. — On peut faire correspondre, d'une autre manière, à tout diviseur donné n , une infinité de caractères de divisibilité dont l'application peut être souvent plus commode que celle de la règle générale ci-dessus.

Désignons respectivement par D et d , C et c , M et m , ... les nombres et chiffres des dizaines, centaines, milles, ... du nombre N . Convenons en outre, pour abrégier l'écriture, qu'un symbole tel que $(M + \lambda c + \mu d + \nu u)_n$ équivaudra à cet

énoncé : Le nombre $M + \lambda c + \mu d + \nu u$ est nul ou divisible par n .

Ceci posé, un nombre N est divisible par 7, 9, 13, 17, 19, ... 97, 101, ... si l'une des conditions suivantes est remplie.

$(D - 2 u)_7,$	$(C - 2 d - 3 u)_7,$	$(M - 2 c - 3 d - u)_7,$
$(D + u)_9,$	$(C + d + u)_9,$	$(M + c + d + u)_9,$
$(D + 4 u)_{13},$	$(C + 4 d + 3 u)_{13},$	$(M + 4 c + 3 d - u)_{13},$
$(D - 5 u)_{17},$	$(C - 5 d + 8 u)_{17},$	$(M - 5 c + 8 d - 6 u)_{17},$
$(D + 2 u)_{19};$	$(C + 2 d + 4 u)_{19},$	$(M + 2 c + 4 d - 8 u)_{19},$
.....			
$(D - 29u)_{97},$	$(C - 29 d - 32 u)_{97},$	$(M - 29 c - 32 d - 42 u)_{97},$
$(D - 10 u)_{101},$	$(C - 10 d - u)_{101},$	$(M - 10 c - d + 10 u)_{101},$
.....			

Pour un diviseur quelconque n , on forme ces conditions et l'on en démontre en même temps l'exactitude en procédant comme il suit :

Soit à trouver la condition de divisibilité par 97 du nombre

$$N = 1\ 000\ M + 100\ c + 10\ d + u.$$

Le multiple de 97 le plus voisin de 1000 est 970. On remplace donc 1000 M par 970 $M + 30 M$. On substitue ensuite à 100, 10, 1 des différences égales $\alpha - \beta$ telles que α soit divisible par 97 et β par 30. On trouve aisément

$$100 = 970 - 870; \quad 10 = 970 - 960; \quad 1 = 1261 - 1260.$$

De là résulte l'identité

$$N \equiv 97 (10 M + 10 c + 10 d + 13 u) + 30 (M - 29 c - 32 d - 42 u)$$

qui démontre la condition :

$$(M - 29 c - 32 d - 42 u)_{97}.$$

Exemple : 12 702 829 est divisible par 97 à cause de

$$12\ 702 - 29 \times 8 - 32 \times 2 - 42 + 9 = 124 \times 97.$$

Remarque. On peut procéder plus rapidement en s'appuyant sur cette observation que si, par exemple, $(C + \lambda d + \mu u)_n$ est une condition, la condition suivante est toujours de la forme $(M + \lambda c + \mu d + \nu u)_n$, λ et μ restant les mêmes.

D'après cela, cherchons la condition de divisibilité par 97 du nombre

$$N = 10\,000 P + 1\,000 m + 100 c + 10 d + u.$$

Elle doit être de la forme $(P - 29 m - 32 c - 42 d + \mathfrak{Z} u)_{97}$, et l'on doit avoir notamment (pour $N = 97$) :

$$- 42 \times 9 + \mathfrak{Z} \times 7 = \text{mult. de } 97, \text{ d'où } \mathfrak{Z} = \frac{1}{7} (\text{mult. de } 97 + 378).$$

On voit aisément que le multiple de 97 à prendre est 679, ce qui donne $\mathfrak{Z} = 151$, que l'on peut remplacer par

$$151 - 2 \times 97 = - 43.$$

La condition cherchée est donc

$$(P - 29 m - 32 c - 42 d - 43 u)_{97}.$$

Elle est générale à cause de l'identité

$$N \equiv 97(103 P + 13 m + 4 c + 4 d + 4 u + 9 (P - 29 m - 32 c - 42 d - 43 u)).$$

Appliquée au nombre 12 709 829, elle donne

$$1\,270 - 29 \times 2 - 32 \times 8 - 42 \times 2 - 43 \times 9 = 5 \times 97.$$

§ III. — Si, dans la liste suffisamment étendue des conditions précédentes, nous groupons toutes celles de divisibilité par un nombre $n_9 = 10 \delta + 9$, nous obtenons :

$$\begin{array}{llll} (D + u)_9, & (C + d + u)_9, & (M + c + d + u)_9, & \dots \\ (D + 2 u)_{19}, & (C + 2 d + 2^2 u)_{19}, & (M + 2 c + 2^2 d + 2^3 u)_{19}, & \dots \\ (D + 3 u)_{29}, & (C + 3 d + 3^2 u)_{29}, & (M + 3 c + 3^2 d + 3^3 u)_{29}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [D + (\delta + 1) u]_{n_9}, & [C + (\delta + 1) d + (\delta + 1)^2 u]_{n_9}, & & \\ & [M + (\delta + 1) c + (\delta + 1)^2 d + (\delta + 1)^3 u]_{n_9}, & & \dots \end{array}$$

et, en rétablissant $9 = i$ d'où $(10 - i = 1)$, ces conditions peuvent s'écrire

$$[(10 - i) D + (\delta + 1) u]_n, \quad [(10 - i)^2 C + (10 - i) (\delta + 1) d + (\delta + 1)^2 u]_n, \\ [(10 - i)^3 M + (10 - i)^2 (\delta + 1) c + (10 - i) (\delta + 1)^2 d + (\delta + 1)^3 u]_n, \dots,$$

Or, ces formules sont générales. En d'autres termes :

Un nombre

$$N = 10^p Z + 10^{p-1} \gamma + \dots + 10 d + u$$

est divisible par le nombre

$$n = 10 \delta + i \quad (u, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

si le nombre

$$(10 - i)^p Z + (10 - i)^{p-1} (\delta + 1) \gamma + \dots + (10 - i (\delta + 1))^{p-1} d + (\delta - 1)^p u$$

est un multiple de n .

Pour le prouver, il suffira de montrer que les conditions que l'on obtient ainsi ne sont pas distinctes de celles établies ci-dessus (II). Ainsi, nous avons trouvé, pour la divisibilité de $N = 10^4 P + 10^3 m + 10^2 c + 10 d + u$ par 97, la condition

$$A_{97} = (P - 29 m - 32 c - 42 d - 43 u)_{97}.$$

La condition

$$B_{97} = (3^4 P + 3^3 \cdot 10 m + 3^2 \cdot 10^2 c + 3 \cdot 10^3 d + 10^4 u)_{97}$$

en résulte, car on a

$$16 A + B \equiv 97 (P - 2 m + 4 c + 24 d + 96 u).$$

Les conditions A n'ont donc subi qu'une transformation destinée à les rendre symétriques et à permettre de les renfermer dans une même formule. Leur démonstration entraîne celle de cette formule. Il est visible d'ailleurs que les conditions B font porter la vérification sur des nombres en général plus grands que le nombre donné N; elles sont donc théoriques. Les conditions d'un emploi pratique sont les conditions A.

§ IV. — Considérons en particulier, pour les nombres $N = 10 D + u$ et $n = 10 \delta + i$, la condition

$$K = (10 - i) D \times (\delta + 1) u = \text{mult. de } n,$$

et appliquons-la à la recherche des diviseurs d'un nombre donné.

Soit, par exemple, $N = 20711$. On a $N < \overline{144}^2$; il faut donc essayer tous les diviseurs premiers jusqu'à 139 inclus. Ces diviseurs forment quatre groupes :

- | | |
|-----|--------------------------------------|
| (a) | 11, 31, 41, 61, 71, 101, 131 |
| (b) | 3, 13, 23, 43, 53, 73, 83, 103, 113 |
| (c) | 7, 17, 37, 47, 67, 97, 107, 127, 137 |
| (d) | 19, 29, 59, 79, 89, 199, 139. |

Pour le groupe a , on a

$$i = 1, \text{ avec } D = 2071, u = 1; K_1 = 18\,640 + \delta \ (\delta = 1, 3, 4, 6, 7, 10, 13)$$

Les nombres 18641, 18643, ... 18653 n'étant pas respectivement divisibles par 11, 31, ... 131, le nombre N n'admet aucun diviseur de a .

On reconnaît de même, en partant successivement de

$$K_3 = 14\,498 + \delta \ (\delta = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11)$$

$$K_7 = 6\,214 + \delta \ (\delta = 0, 1, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 13)$$

$$K_9 = 2\,072 + \delta \ (\delta = 1, 2, 5, 7, 8, 10, 13).$$

que N n'admet aucun diviseur des groupes b et c , mais qu'il admet le diviseur 139 du groupe d , et il en résulte $20711 = 139 \times 149$.

Remarque. On a choisi à dessein un cas qui oblige à faire les calculs jusqu'au bout, et de plus, dirigé ces calculs d'une façon défavorable. On voit, en effet, qu'il sera toujours plus pratique d'opérer dans l'ordre d, c, b, a que dans l'ordre a, b, c, d . Car, d'après les valeurs de K_1, K_3, K_7, K_9 , on n'a à considérer, pour le groupe d , que des nombres qui sont environ le $\frac{1}{10}$ du nombre N , tandis que, pour le groupe a , on considère des nombres qui en sont environ les $\frac{9}{10}$.

L. RIPERT (Poix, Somme).