

SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Autor(en): **Zervos, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7565>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

1. THÉORÈME. — *Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation qu'on a en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.*

Soit l'équation :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0.$$

En posant

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1, \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2, \dots, \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m,$$

l'équation proposée devient :

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1 \lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = 0.$$

Si cette équation avait toutes ses racines négatives, nous pourrions poser l'équation donnée sous la forme :

$$(x + a)(x + b) \dots (x + u) = 0 \quad \text{où} \quad a > 0, b > 0, \dots, u > 0.$$

Mais

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + \mu_1 x + \mu_1 \mu_2,$$

où, évidemment, nous avons $\mu_1 > \mu_2$ et par suite

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b)(x + c) &= x^3 + (\mu_1 + c)x^2 + \mu_1(\mu_2 + c)x + \mu_1 \mu_2 c \\ &= x^3 + \eta_1 x^2 + \eta_1 \eta_2 x + \eta_1 \eta_2 \eta_3 \end{aligned}$$

en posant

$$\eta_1 = \mu_1 + c, \quad \eta_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 + c)}{\mu_1 + c}, \quad \eta_3 = \mu_2 \frac{c}{\mu_2 + c}.$$

Mais, puisque $\mu_1 > \mu_2$, nous aurons $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$.

D'une manière générale, si l'on multiplie un polynome de la forme

$$x^{m-1} + \rho_1 x^{m-2} + \rho_1 \rho_2 x^{m-3} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{m-1},$$

où $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \dots > \rho_{m-1} > 0$, par $x + k$, où $k > 0$, dans le produit, que nous pouvons écrire sous la forme

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1 \lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m,$$

nous aurons

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_m.$$

En effet, le produit sera

$$x^m + (\rho_1 + k)x^{m-1} + \rho_1(\rho_2 + k)x^{m-2} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m k,$$

d'où nous déduisons

$$\lambda_1 = \rho_1 + k,$$

$$\lambda_2 = \rho_1 \frac{\rho_2 + k}{\rho_1 + k},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_{n-1} = \rho_{n-2} \frac{\rho_{n-1} + k}{\rho_{n-2} + k},$$

$$\lambda_n = \rho_{n-1} \frac{\rho_n + k}{\rho_{n-1} + k}.$$

$$\dots \dots \dots$$

Comparons les rapports λ_{n-1} , λ_n . Remarquons que

$$\lambda_{n-1} = \frac{\rho_{n-2}(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-1} + k)}{(\rho_{n-2} + k)(\rho_{n-1} + k)} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{\rho_{n-1}(\rho_n + k)(\rho_{n-2} + k)}{(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-2} + k)}.$$

En rappelant que $\rho_{n-2} > \rho_{n-1} > \rho_n$ nous trouvons l'inégalité

$$\rho_{n-2}k + \rho_{n-2}\rho_{n-1} > \rho_{n-1}k + \rho_{n-2}\rho_{n-1},$$

d'où

$$\rho_{n-2}(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-1} + k) > \rho_{n-1}(\rho_{n-2} + k)(\rho_{n-1} + k)$$

et par conséquent

$$\lambda_{n-1} > \lambda_n.$$

C. q. f. d.

2. — Soit l'équation :

$$f(x) = a_{2m} - a_{2m-1}x + a_{2m-2}x^2 - \dots + a_0x^{2m} = 0$$

où a_0, a_1, a_{2m} sont positifs.

Posons

$$\frac{-a_{2m-1}}{a_{2m}} = \lambda_1,$$

$$\frac{a_{2m-2}}{-a_{2m-1}} = \lambda_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

L'équation donnée s'écrit encore ainsi :

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_1 \lambda_2 x^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2m} x^{2m} = 0.$$

Soit λ_{2n} le plus petit en valeur absolue des $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2m}, \lambda_{2\rho-1}$ le plus grand en valeur absolue des $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \dots, \lambda_{2m-1}$. On peut dire que toutes les racines positives de $f(x)$ sont plus petites que $-\frac{1}{\lambda_{2n}}$ et plus grandes que $-\frac{1}{\lambda_{2\rho-1}}$.

En effet, quand $x > -\frac{1}{\lambda_{2n}}$, nous avons, d'après nos hypothèses

$$x > -\frac{1}{\lambda_2}, \quad x > -\frac{1}{\lambda_4}, \quad \dots \quad x > -\frac{1}{\lambda_{2m}} \quad \text{ou} \quad |\lambda_2 x| > 1, \quad |\lambda_4 x| > 1, \quad \dots \quad |\lambda_{2m} x| > 1$$

et, par suite, le troisième terme du polynome $f(x)$ est plus grand que le second pris en valeur absolue, le cinquième est plus grand que le quatrième, etc., parce que le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité.

Et quand $0 < x < \frac{1}{|\lambda_{2\rho-1}|}$, nous avons

$$x < \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad x < \frac{1}{|\lambda_3|}, \quad \dots, \quad x < \frac{1}{|\lambda_{2m-1}|}$$

et par suite les termes négatifs deviennent plus petits que les termes positifs qui les précèdent, et par conséquent $f(x) > 0$.

Corollaire. — Si dans le précédent polynome nous avons $\lambda_{2\rho-1} > \lambda_{2n}$ il n'y aurait aucune racine positive.

P. ZERVOS (Paris).