CORRESPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

CORRESPONDANCE

Sur la formule du binôme.

Généralement (surtout parmi les élèves) on s'imagine qu'il est impossible d'établir la formule du binôme sans connaître la théorie des combinaisons. Or, ce sont là deux choses tout à fait indépendantes l'une de l'autre. En effet, laissant de côté certaine démonstration de la formule de Newton, fondée sur la méthode d'induction, et par conséquent peu propre à figurer dans un cours — je prétends qu'on peut réussir, avec des débutants, en procédant comme il suit.

Appelons, comme tout le monde, dérivée d'un polynôme entier $f(x)$, la limite vers laquelle tend.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quand h tend vers zéro, et cherchons, en particulier, la dérivée de αx^m, α désignant une constante, et m un entier positif. De l'identité

$$\alpha(x+h)^m - \alpha x^m = \alpha h\left[(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \ldots + x^{m-1}\right]$$

on déduit

$$\frac{\alpha(x+h)^m - \alpha x^m}{h} = \alpha \sum_{p=0}^{p=m-1} (x+h)^{m-1-p} x^p.$$

Or, quand h tend vers zéro, chaque terme écrit sous le signe Σ a la même limite, x^{m-1}; et comme ces termes sont au nombre de m, leur somme a pour limite mx^{m-1}. Donc la dérivée cherchée est $m\alpha x^{m-1}$.

Ensuite, la dérivée du polynôme $f(x)$ étant la somme des dérivées de ses termes, on en déduira,

$$f'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)\,a_1x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

et pour les expressions des dérivées suivantes :

$$f''(x) = m(m-1)a_0x^{m-2} + \ldots + 2a_{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^m(x) = m(m-1)\ldots 2.1.\,a_0\,;$$

Puis :

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1.2} f''(o) + \ldots + \frac{x^m}{m!} f^m(o).$$

En particulier, si $f(x)$ est le développement de $(a + x)^m$, ce qui précède montre que l'on a, en changeant x en $a + x$:

$$f'(x) = m(a+x)^{m-1}, \qquad f'(o) = ma^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)(a+x)^{m-2}, \qquad f''(o) = m(m-1)a^{m-2}, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$f(x) = a_m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \ldots + x^m$$

V. Jamet (Marseille).

A propos d'un article sur le calcul des probabilités.

Je demande pardon aux lecteurs de la *Revue* de prolonger devant eux un débat qui touche à peine aux mathématiques bien qu'il y soit question de probabilités, assez simple d'ailleurs pour que chacun puisse se faire une opinion personnelle après quelques minutes de réflexion. Mais MM. Vaschide et Piéron semblant induire de notre discussion que la fréquentation des formules est un obstacle nécessaire à l'intelligence des choses, les mathématiciens ne sauraient m'en vouloir de protester doucement contre cet arrêt de déchéance un peu brutal. En défendant une dernière fois mon point de vue, je n'aurai pas d'arguments nouveaux à présenter; il suffira de soumettre à un examen attentif ceux qui ont été produits de part et d'autre.

Je laisse de côté le premier point visé dans ma lettre puisque aussi bien nous sommes maintenant d'accord et j'arrive de suite à l'argument du joueur à rouge et noire.

Nos auteurs consacrent plusieurs lignes à la définition, qu'ils jugent décisive, du mot *série*. Une série, c'est, d'après eux, une succession de coups d'une même couleur précédés et suivis d'un coup de couleur différente. Pour être plus ou moins heureuse une définition n'en est pas moins essentiellement arbitraire; elle est quelquefois indiquée par cet ensemble d'actions et de réactions qu'exercent les uns sur les autres les mots d'une langue et qui constitue son génie, mais elle n'est jamais imposée par la raison et son seul objet est de préciser et d'alléger le langage. A moins que, comme il arrive quelquefois, le choix d'un mot n'ait justement pour but d'égarer la raison en lui suggérant certaines idées préconçues et irraisonnées sur le rôle spécial de l'objet dénommé par rapport aux objets analogues non dénommés; ici, par exemple, d'insinuer que l'apparition d'une série nombreuse donne sur les événements futurs des renseignements qui manquent lorsque la série fait défaut. Mais ceci n'est qu'un sophisme ; en bonne logique, ce n'est pas en discutant sur la légitimité d'une convention verbale, que j'accepte d'ailleurs comme j'accepterais toute autre, qu'on peut élucider n'importe quel point de fond, la thèse du joueur par exemple.

On peut présenter cette thèse sous la forme suivante. Un joueur assiste au jeu de rouge et noire et voit sortir une noire et six rouges de suite. Si à ce moment il entre au jeu il doit mettre sur la noire, car les séries de plus de six rouges sont fort peu problables.

Pour rétorquer l'argument, il ne suffit pas de dire avec mes honorables contradicteurs que la notion de probabilité s'évanouit pour un cas unique. L'assertion est contestable ; d'ailleurs si l'avantage, bien qu'aléatoire, existe pour un coup unique, il se manifestera certainement lorsqu'on répétera l'épreuve. Il n'y a donc là qu'un semblant de réfutation.

Voici ma réponse. Toute question de probabilité repose en dernière analyse sur une convention plus ou moins déguisée, parfois si naturelle qu'elle passe inaperçue, et relative à l'énumération des cas regardés comme également vraisemblables. Il entre ainsi dans la notion même de probabilité, en tant que grandeur, un élément irrationnel ne relevant que du sens commun. De là résulte qu'à moins d'être incohérente, aucune affirmation sur la probabilité ne peut être qualifiée d'impossible ou d'absurde ; tout au plus pourra-t-on l'appeler bizarre et contraire au bon sens.

Devant le sens commun le joueur a tort. Si le hasard règle seul l'arrivée des couleurs et que, pour éviter toute supercherie, on suppose aveugle et sourde la personne chargée de le consulter, il est impossible d'imaginer par quel moyen s'exercerait l'influence supposée des coups joués sur les coups à jouer et, en réalité, l'apparition d'une série si prolongée soit-elle ne donne pas le moindre indice sur la couleur qui va sortir. La répugnance qu'éprouve un cerveau bien fait à admettre le contraire me paraît même empêcher seule nos contradicteurs de se ranger purement et simplement à l'avis du joueur. En tout cas si l'on adoptait le point de vue de ce dernier, on ne pourrait plus supposer constante, comme l'ont fait par inadvertance MM. Vaschide et Piéron p. 16, la probabilité de l'apparition d'une noire quels que soient les coups déjà joués.

Dans la supposition inverse, qui est la nôtre, la probabilité de chaque couleur est $\frac{1}{2}$ à chaque coup. D'où résulte par les principes du calcul des probabilités, que les séries homogènes sont *a priori* d'autant moins vraisemblables qu'elles sont plus longues. Le seul motif invoqué pour démontrer la thèse est justement la rareté de ces séries ; mais on ne peut faire état en faveur de la thèse d'une propriété qui est une conséquence de la négative.

Quant à l'analyse employée par MM. Vaschide et Piéron pour mettre en évidence une contradiction inhérente à notre théorie et d'après laquelle les séries de 7, 8, 9 rouges devraient être aussi probables que celles de 6, elle n'est pas exacte.

On a déjà joué 7 coups ; si l'on amène noire au 8ᵉ coup, événement de probabilité $\frac{1}{2}$, la série sera de six rouges ; si c'est rouge, événement dont la probabilité est aussi $\frac{1}{2}$, la série sera de plus de 6 rouges, on ne saura de combien au juste qu'en continuant la partie. La probabilité de faire une série de 7 rouges sera celle d'amener d'abord rouge puis noire, on égale à $\frac{1}{4}$. De même, la probabilité de faire une série de 8 rouges sera celle d'amener deux rouges de suite, puis noire, ou égale à $\frac{1}{8}$. La probabilité de faire une série de 9, 10... rouges sera donnée par les nombres $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, etc. Ainsi la probabilité de faire une série de plus de six rouges est $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2}$ et se trouve égale, comme il fallait, à la probabilité d'amener rouge au 8^e coup.

En résumé la thèse et sa négative sont deux affirmations aussi justes l'une que l'autre au point de vue purement logique. La thèse n'est accompagnée d'aucune preuve, la négative seule satisfait cette obscure intuition du vrai qui est le bon sens. Le bon sens, il est vrai, peut se tromper et doit s'incliner devant les arrêts de l'expérience. Jusqu'à quel point peut-on parler d'expérience en matière de probabilité et quelle est la valeur démonstrative de cette expérience ? C'est là une question délicate d'un haut intérêt pratique et philosophique à peine abordée dans les traités classiques. En attendant la solution définitive de cette question, à laquelle MM. Vaschide et Piéron nous ont apporté une intéressante contribution, il reste au joueur, s'il veut faire triompher son dire, à instituer des essais où l'on comparera les successions de 6 rouges suivies d'une noire aux successions de six rouges suivies d'une rouge. Je doute fort pour ma part que ces dernières soient moins fréquentes que les autres.

C. CAILLER (Genève).
