II LES PREUVES DE POSSIBILITÉ D'UNE FORME NON-EUCLIDIENNE DE L'ESPACE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Arrivées à ce point, les études ne se sont pas bornées à l'espace à trois dimensions. Partant de ceci, que dans l'Algèbre le nombre des variétés d'expressions est illimité, on est parvenu à ne considérer l'espace triplement étendu que comme cas particulier d'un espace général ayant un nombre arbitraire de dimensions; en ceci, comme presque partout ailleurs, on a suivi des voies parcourues d'abord, ou du moins indiquées par Gauss.

Ainsi, dans nos recherches mathématiques, les choses en sont là : à côté de l'espace conforme aux suppositions de la Géométrie euclidienne, et que l'expérience nous rend familier, on prend encore en considération les différentes autres formes possibles de l'espace. Tout en conservant la plus grande partie des hypothèses euclidiennes, il reste toujours encore deux catégories de formes d'espace qui, par la généralisation d'un aperçu propre à l'étude des surfaces, sont considérées comme espaces de courbure positive et négative; entre ces deux formes, l'espace euclidien, dont le signe caractéristique est la courbure de valeur zéro, prépare la transition.

II

LES PREUVES DE POSSIBILITÉ D'UNE FORME NON-EUCLIDIENNE DE L'ESPACE

Tout en m'apprêtant à soumettre à un examen critique les fondements de l'espace considéré à la façon moderne, je voudrais d'abord mettre en pleine lumière les points de vue auxquels je me place dans cet examen. Je ne méconnais en aucune manière les progrès que la recherche mathématique a faits, en ce sens que chaque conclusion de la théorie a précisé la part revenant aux différentes hypothèses du système géométrique considéré. Le bénéfice que la recherche géométrique a, sans sortir du système euclidien, retiré de son travail, nous est montré clairement par un coup d'œil jeté sur la Géométrie projective; tout en comblant les lacunes laissées par M. von Staudt, les recherches de la Géométrie non-euclidienne ont fourni l'occasion de développer utilement cette branche. Je paie un tribut d'admiration à la sagacité grâce à laquelle, moyennant l'abandon de quelques hypothèses du système euclidien, on a établi et fouillé jusque dans le détail de nouvelles formes de l'espace conçues sur une base plus large.

Mais je voudrais aussi établir en même temps ce fait : la question de savoir si l'une de ces hypothèses n'est pas ou n'est qu'incomplètement compatible à une forme d'espace capable d'une existence réelle ne se décidera, ni par la discussion purement théorique des conclusions provenant du doute émis sur la conception euclidienne, ni par l'étude détaillée des systèmes qui ont été établis en conservant une partie des axiomes d'Euclide.

Voici donc la question : Quelles conditions doit remplir une forme d'espace pour qu'on puisse lui attribuer une réelle existence? C'est à cette question seule, comme je le remarque ici expressément, que s'adresseront toutes mes discussions suivantes.

Que des domaines entiers de la Géométrie, comme par exemple la Géométrie projective, aient pu être créés d'une façon entièrement indépendante de la conception des parallèles euclidiennes, ceci naturellement ne prouve rien. Cette indépendance à l'égard de l'axiome des parallèles et des propositions connexes, comme celle de la somme des angles d'un triangle, n'est pas une nouveauté; l'étude de la congruence des triangles en offre aussi un exemple depuis longtemps connu, mais cet exemple n'a jamais ébranlé la croyance à la nécessité intrinsèque de la théorie des parallèles euclidiennes, croyance qui s'est conservée pendant des siècles jusqu'à nos jours.

En admettant même que l'on ne soit pas parvenu jusqu'à présent à donner du Postulatum d'Euclide une démonstration généralement reconnue et à l'abri de toute attaque, ceci n'est pas un signe certain qu'une telle preuve soit absolument impossible, et qu'il y ait lieu de concevoir un autre état de choses. L'Histoire offre trop d'exemples de recherches qui pendant longtemps ont manqué leur but parce que de prime abord elles ont été engagées sous une forme erronée ou dans une fausse direction. Mais je trouve beaucoup plus extraordinaire que, malgré le manque d'une base hors d'atteinte, la croyance à la justesse du système euclidien n'ait eu aucune secousse pendant plus de deux mille ans. Saccheri même, aux recherches récemment connues duquel les partisans de la théorie moderne de l'Espace ont eu recours, a repoussé absolument tout doute sur la réelle existence de la forme euclidienne.

L'existence du système admirablement établi par Bolyai et Lobatschewsky ne possède pas non plus de preuve décisive. Si des contradictions internes n'ont pas jusqu'à ce jour été relevées dans ce système, on ne peut pas en conclure avec certitude que de telles contradictions n'existent pas. Ici encore il se peut que la recherche de ces oppositions, grâce à la direction peu convenable qu'elle aurait prise dès l'origine, ait simplement passé à côté des points essentiels : C'est la meilleure garantie contre ces contradictions, c'est-à-dire l'évidence pratique qui manque au système non-euclidien de Géométrie.

Pour cette raison, la recherche géométrique moderne a jugé nécessaire de ne pas se contenter de cette base négative pour justifier la théorie de l'espace non-euclidien; elle croit pouvoir affirmer la possibilité de l'existence des formes nouvelles d'espace par des raisons positives directes. L'une de ces preuves est dans la signification géométrique que l'on accorde aux transformations algébriques. Je ferai expressément remarquer que la transformation algébrique ne possède par elle-même aucune force probante ; aucun calcul du monde ne peut donner à lui seul d'éclaircissement sur l'existence des relations de l'espace. En tous les cas, on peut bien considérer les expressions algébriques selon le sens attaché à chaque variété d'expressions comme signe de différentes figures géométriques : point, ligne, surface, etc. ; mais quant à ce qui concerne la forme de ces figures, leurs relations mutuelles, et leurs positions relatives, surtout leurs rapports angulaires, aucune considération purement algébrique ou analytique ne peut jamais donner le moindre éclaircissement. Tous ces faits ne doivent provenir que d'une source extérieure, et le raisonnement algébrique ne peut recevoir une certaine interprétation géométrique qu'en employant une série de moyens qu'il n'offre pas par lui-même. Il est clair que pour cette interprétation le critérium qui s'attache à la preuve algébrique ne peut plus être invoqué.

Et maintenant, prenons l'interprétation courante; les exemples ci-après mettront en évidence sa forme arbitraire.

Le premier de ces exemples concerne une forme d'espace qui ne se contente pas de rejeter l'axiome des parallèles d'Euclide, mais qui introduit des relations toutes nouvelles. On y considère les points d'une droite comme des figures de l'espace, comme les éléments d'un groupe de grandeurs se ramenant à eux-mêmes par la transformation $z' = \lambda z$ (1). En conséquence on a l'expression $\frac{1}{\log \lambda} \log \frac{z}{z'}$ pour la distance de deux points. L'arbitraire de cette conception est palpable.

Comme deuxième exemple, je cite le calcul des distances, que Hilbert donne dans son écrit déjà cité (2); celui-ci a pour base la représentation conforme de l'unité au moyen de deux segments (*Strecken*) OE et OE', choisis sans qu'on se préoccupe de savoir s'ils possèdent ou non, dans le sens ordinaire du mot, une égale longueur. Ici encore il est à peine utile d'insister sur ce que l'hypothèse a d'arbitraire.

Si ces deux exemples ont un intérêt seulement théorique, en ce que les auteurs des conceptions que nous venons de citer ont uniquement pour but de montrer les modifications qu'exige notre pensée, par l'abandon de certaines hypothèses, dans la représentation de l'espace telle qu'elle nous est parvenue, l'appel à la transformation algébrique par laquelle on doit justifier l'existence du système de Bolyai et de Lobatchewsky a un intérêt pratique d'autant plus grand. Car c'est sur ce système que se concentre particulièrement l'attention quand il s'agit de la réalisation pratique de la Géométrie non-euclidienne dans le sens étroit du mot.

Je puis également mentionner ici l'ouvrage précédemment cité de Hilbert où il est dit (3) : « Qu'on se figure les points, droites et plans de la Géométrie ordinaire, en tant qu'ils sont à l'intérieur d'une sphère solide, comme éléments constitutifs d'une Géométrie de l'espace, et qu'on établisse les congruences de cette Géométrie au moyen des transformations linéaires de la Géométrie usuelle capables de ramener la sphère solide à elle-même : on reconnaît

(1) F. Klein, *Math. Annalen*, IV, p. 585; voir Pietzker, *Ztschr. f. math. und natur. Unt.*, XXIII, p. 81-106.

(2) D. Hilbert. *Fondements de la Géométrie*, § 24-30.

(3) Hilbert. *Fondements de la Géométrie*, § 10, fin.

par des définitions appropriées que dans cette Géométrie « non-euclidienne » plusieurs axiomes euclidiens, sauf l'axiome des parallèles, sont valables; et comme la possibilité de la Géométrie ordinaire est établie, celle de la Géométrie non-euclidienne s'ensuit. »

Les termes de cette citation : « On doit établir les congruences au moyen des transformations », montrent clairement sa grande faiblesse; on reconnaît déjà par là qu'en fin de compte toute la discussion ne porte que sur une conception impropre à laquelle manque la précision nécessaire.

Ceci devient encore plus lucide si l'on examine en détail l'état de la question, comme cela a été fait d'abord par Cayley (1). Bien entendu, les équations qui résultent de là entre les côtés et les angles d'un triangle reposent sur l'emploi des fonctions hyperboliques, comme dans la Géométrie lobatschewskienne, mais les longueurs de côtés et les grandeurs d'angles liées ensemble par de telles équations ne représentent plus les grandeurs des côtés et angles tels qu'ils se trouvent réellement dans ce triangle; ce sont de nouvelles grandeurs qui ont un certain rapport avec ces grandeurs proprement dites, et leur sont substituées; et cette substitution n'est légitime que si, en accomplissant dans les grandeurs substituées certaines opérations, les valeurs nouvelles qu'on leur fait prendre ont entre elles un rapport égal à celui qu'avaient auparavant les grandeurs proprement dites.

Il existe donc une certaine correspondance entre les grandeurs proprement dites et celles qu'on met à leur place. Il va sans dire que cette correspondance ne donne pas le droit d'identifier la première classe de grandeurs avec la seconde; mais ceci devient encore plus clair lorsque l'on représente cette transformation par une projection. Il se trouve, par exemple, qu'à chaque angle d'un triangle vient s'adjoindre un deuxième angle et que la somme des angles adjoints qui correspondent aux angles du triangle garde en effet une valeur inférieure à deux droits, ce qui est conforme aux enseignements de la Géométrie lobatschewskienne. Mais ces angles ne sont plus du tout ceux de la figure dont il s'agit; ce ne sont pas davantage les angles d'un autre

(1) Cayley, On the non euclidean Geometry, *Math. Ann.*, V, p. 630.

triangle plan, ce sont plutôt des angles n'appartenant pas même à une figure rectiligne.

Affirmer par de telles transformations la possibilité de l'existence de figures planes avec une forme d'angle compatible au système de Lobatschewsky c'est émettre une assertion en l'air; cette assertion ne serait prouvée que si l'on identifiait deux grandeurs distinctes; elle repose donc sur un développement de la notion logique d'égalité, contre lequel toutes les objections élevées jusqu'à présent au sujet de l'axiome des parallèles paraissent peu de chose.

On a également voulu, pour prouver l'existence de la Géométrie lobatschewskienne, faire appel à l'analogie que Beltrami, déjà cité, a reconnue entre cette Géométrie et les relations présentées par les surfaces de courbure constante et négative. En effet, cette analogie est parfaite si l'on attribue aux plus courts chemins tracés sur ces surfaces le rôle qui incombe aux droites sur le plan euclidien. Mais si l'on en tire cette conclusion que, les relations intérieures étant les mêmes dans les deux cas, et qu'en outre sur les surfaces données la Géométrie euclidienne étant valable jusqu'à la proposition des parallèles, l'existence d'une Géométrie indépendante de cette proposition serait prouvée, eh bien ! il faut absolument contester cette conclusion. Car il n'est pas exact que la Géométrie à deux dimensions sur les surfaces de courbure constante négative soit entièrement conforme à toutes les suppositions de la Géométrie euclidienne déduction faite de l'axiome des parallèles.

Ceci est tout particulièrement vrai au sujet de la droite dont on n'a pas épuisé la notion en disant qu'elle représente la plus courte distance de deux points. Souvent aussi, dans la Géométrie de Bolyai comme dans l'euclidienne, la qualité fondamentale de la droite employée de préférence est, comme nous l'expliquons plus loin, celle d'être une ligne entièrement déterminée par deux points, et d'après cela parfaitement retournable; cette qualité ne prend naturellement toute sa valeur que si l'on envisage aussi les trois dimensions de l'espace, de sorte que l'on comprend que l'on n'y avait pas égard, quand on marquait l'analogie entre le plan euclidien et la surface de Beltrami.