

# 1. Sur les forces qui coupent une droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTES SUR LA MÉCANIQUE

---

## 1. Sur les forces qui coupent une droite.

a) On peut aussi dans ce cas, plus général que celui des forces centrales, exprimer la vitesse et la force en fonction des seules  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  et de leurs dérivées par rapport à  $\psi$ , d'une manière tout à fait analogue au cas des forces centrales.

En effet, nous avons en général :

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2; \quad (\alpha)$$

mais, la projection de la force sur le plan des  $xy$ , perpendiculaire à la droite qu'elle coupe (axe des  $z$ ) étant une force centrale, on a :

$$\rho_1^2 d\theta_1 = c dt, \text{ ou bien } \rho^2 \sin^2 \theta d\psi = c dt, \quad (\beta)$$

car les coordonnées polaires planes de la projection du mobile sur le plan des  $xy$  sont :  $\rho_1 = \rho \sin \theta$ ,  $\theta_1 = \psi$ .

Donc  $(\alpha)$  prend la forme :

$$v^2 = \frac{c^2}{\sin^4 \theta} \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( \sin^2 \theta + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2 \right) + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\right)^2 \right], \quad (1)$$

qui constitue une généralisation de la formule des forces centrales :

$$v^2 = c^2 \left[ \frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta}\right)^2 \right]; \quad (1')$$

(1') s'obtient de (1), en y faisant  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (et  $\psi \equiv \theta$ ).

Pour trouver maintenant la force accélératrice  $F$ , nous avons pour sa projection  $F_1$  sur le plan des  $xy$  (formule de *Binet*) :

$$F_1 \equiv F \sin \theta = \frac{2c}{\rho_1^2} \left[ \frac{1}{\rho_1} + \frac{d^2 \left( \frac{1}{\rho_1} \right)}{d\theta_1^2} \right]. \quad (2')$$

d'où :

$$F = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^3 \theta} \left[ \frac{1}{\rho \sin \theta} + \frac{d^2 \left( \frac{1}{\rho \sin \theta} \right)}{d\psi^2} \right],$$

ou bien, après quelques calculs,

$$F = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^4 \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \left( (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{d\psi} \right)^2 - \operatorname{ctg} \theta \frac{d^2 \theta}{d\psi^2} \right) - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d\psi} \frac{d\theta}{d\psi} + \frac{d^2 \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d\psi^2} \right]; \quad (2')$$

cette formule est bien une généralisation de celle de *Binet* (2'), qui résulte de (2) pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (et  $\psi \equiv \theta$ ).

b) Si les équations polaires de la trajectoire sont données, les formules (1) et (2) nous font connaître, par de simples différentiations, la vitesse et la force. Réciproquement, si l'on se donne la force accélératrice en fonction des  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , soit  $F = \sigma(\rho, \theta, \psi)$ , on aura, pour déterminer la trajectoire, à intégrer le système des deux équations différentielles polaires de la courbe : l'une d'elles est l'équation (2), où  $F \equiv \sigma(\rho, \theta, \psi)$ , l'autre se trouve comme il suit : en appelant  $F_2$  la projection de la force sur l'axe des  $z$ , on a :

$$F = \frac{F_2}{\cos \theta},$$

et en effectuant les différentiations, eu égard à la formule (3), on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, \theta, \psi) &= \frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 (\rho \cos \theta)}{dt^2}, \\ \sigma(\rho, \theta, \psi) &= \frac{c^2}{\rho^2 \sin^4 \theta} \left[ \frac{1}{\rho} \left( -\operatorname{tg} \theta \frac{d^2 \theta}{d\psi^2} + \left( \frac{d\theta}{d\psi} \right)^2 \right) + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d\psi} \frac{d\theta}{d\psi} - \frac{d^2 \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d\psi^2} \right], \end{aligned}$$

qui est bien la seconde équation cherchée.

c) Si la force est perpendiculaire à l'axe des  $z$ , on a :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad z = At + B;$$

si maintenant la vitesse initiale est, elle-même, perpendiculaire à l'axe, on aura  $A = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0$ , donc  $z = B$ , c'est-à-dire la trajectoire se trouve dans un plan parallèle au plan des  $xy$  et le mouvement est central ; si  $A \geq 0$ , le mouvement semble central à un observateur entraîné par le plan mobile  $z = At + B$ .

## 2. Sur les accélérations d'ordres supérieurs.

L'accélération du  $n^{\text{ième}}$  ordre est ordinairement définie comme la limite du rapport de l'accroissement géométrique de l'accélération précédente d'ordre  $n - 1$  (= vitesse, pour  $n = 2$ ) à l'accroissement correspondant  $\Delta t$  du temps.

Cependant, pour l'accélération ordinaire de l'ordre 2  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$ , il existe aussi une autre manière de la trouver : l'accélération de l'ordre 2 est la limite du rapport du double de la déviation à  $(\Delta t)^2$ .

Nous allons maintenant montrer que cette définition s'étend à l'accélération d'un ordre quelconque  $n$ .

A cet effet, soit  $M(t_0, x_0, y_0, z_0)$  le point considéré de la trajectoire et  $M'$  la nouvelle position du mobile au bout du temps  $\Delta t \equiv t - t_0$ , et considérons les développements des coordonnées du mobile :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 (t - t_0) + \dots + \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0 \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)_0 \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \dots, \\ y = y_0 + \dots, \quad z = z_0 + \dots \end{array} \right.$$

Si nous construisons maintenant la courbe suivante (K) :

$$\left. \begin{array}{l} X = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 (t - t_0) + \dots + \left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0 \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ Y = y_0 + \dots, Z = z_0 + \dots, \end{array} \right\} \quad (K)$$