1. Sur les forces qui coupent une droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

NOTES SUR LA MÉCANIQUE

1. Sur les forces qui coupent une droite.

a) *On peut aussi dans ce cas, plus général que celui des forces centrales, exprimer la vitesse et la force en fonction des seules* ρ, θ, ψ *et de leurs dérivées par rapport à* ψ, d'une manière tout à fait analogue au cas des forces centrales.

En effet, nous avons en général :

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 ; \qquad (\alpha)$$

mais, la projection de la force sur le plan des xy, perpendiculaire à la droite qu'elle coupe (axe des z) étant une force centrale, on a :

$$\rho_1^2 d\theta_1 = c dt, \text{ ou bien } \rho^2 \sin^2\theta d\psi = c dt, \qquad (\beta)$$

car les coordonnées polaires planes de la projection du mobile sur le plan des xy sont : $\rho_1 = \rho \sin\theta$, $\theta_1 = \psi$.

Donc (α) prend la forme :

$$v^2 = \frac{c^2}{\sin^4\theta}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2\right) + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\right)^2\right], \qquad (1)$$

qui constitue une généralisation de la formule des forces centrales :

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\theta}\right)^2\right] ; \qquad (1')$$

$(1')$ s'obtient de (1), en y faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et $\psi = \theta$).

Pour trouver maintenant la force accélératrice F, nous avons pour sa projection F_1 sur le plan des xy (formule de *Binet*) :

$$F_1 \equiv F \sin\theta = \frac{2c}{\rho_1^2}\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\theta_1^2}\right]. \qquad (2')$$

d'où :

$$F = \frac{c^2}{\rho^2 \sin^3\theta}\left[\frac{1}{\rho\sin\theta} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\right)}{d\psi^2}\right],$$

ou bien, après quelques calculs,

$$F = \frac{c^2}{\rho^2\sin^4\theta}\left[\frac{1}{\rho}\left((1 + 2\,\mathrm{ctg}^2\theta)\left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2 - \mathrm{ctg}\,\theta\frac{d^2\theta}{d\psi^2}\right)\right.$$
$$\left. - 2\,\mathrm{ctg}\theta\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\,\frac{d\theta}{d\psi} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi^2}\right]; \qquad (2')$$

cette formule est bien une généralisation de celle de *Binet* (2'), qui résulte de (2) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et $\psi \equiv \theta$).

b) Si les équations polaires de la trajectoire sont données, les formules (1) et (2) nous font connaître, par de simples différentiations, la vitesse et la force. Réciproquement, si l'on se donne la force accélératrice en fonction des ρ, θ, ψ, soit $F = \sigma(\rho, \theta, \psi)$, on aura, pour déterminer la trajectoire, à intégrer le système des deux équations différentielles polaires de la courbe : l'une d'elles est l'équation (2), où $F \equiv \sigma(\rho, \theta, \psi)$, l'autre se trouve comme il suit : en appelant F_2 la projection de la force sur l'axe des z, on a :

$$F = \frac{F_2}{\cos\theta},$$

et en effectuant les différentiations, eu égard à la formule (3), on trouve :

$$\sigma(\rho,\theta,\psi) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{d^2(\rho\cos\theta)}{dt^2},$$

$$\sigma(\rho,\theta,\psi) = \frac{c^2}{\rho^2\sin^4\theta}\left[\frac{1}{\rho}\left(-\mathrm{tg}\,\theta\,\frac{d^2\theta}{d\psi^2} + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2\right)\right.$$
$$\left. + 2\mathrm{ctg}\,\theta\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi}\,\frac{d\theta}{d\psi} - \frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\psi^2}\right],$$

qui est bien la seconde équation cherchée.

c) Si la force est perpendiculaire à l'axe des z, on a :

$$\frac{d^2z}{dt^2}=0 \quad \text{ou} \quad z=At+B;$$

si maintenant la vitesse initiale est, elle-même, perpendiculaire à l'axe, on aura $A=\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}=0$, donc $z=B$, c'est-à-dire la trajectoire se trouve dans un plan parallèle au plan des xy et le mouvement est central ; si $A \gtrless 0$, le mouvement semble central à un observateur entraîné par le plan mobile $z=At+B$.

2. Sur les accélérations d'ordres supérieurs.

L'accélération du n^ième^ ordre est ordinairement définie *comme la limite du rapport de l'accroissement géométrique de l'accélération précédente d'ordre* n — 1 (= *vitesse, pour* n = 2) *à l'accroissement correspondant* Δt *du temps.*

Cependant, pour l'accélération ordinaire de l'ordre 2 $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$, il existe aussi une autre manière de la trouver : *l'accélération de l'ordre 2 est la limite du rapport du double de la déviation à* $(\Delta t)^2$.

Nous allons maintenant montrer que *cette définition s'étend à l'accélération d'un ordre quelconque* n.

A cet effet, soit M (t_0, x_0, y_0, z_0) le point considéré de la trajectoire et M' la nouvelle position du mobile au bout du temps $\Delta t \equiv t-t_0$, et considérons les développements des coordonnées du mobile :

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(t-t_0)+\ldots+\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)_0\frac{(t-t_0)^n}{n!} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots, \\ y=y_0+\ldots\ldots, \qquad\qquad z=z_0+\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si nous construisons maintenant la courbe suivante (K) :

$$\left.\begin{array}{l} X=x_0+\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(t-t_0)+\ldots+\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_0\frac{(t-t_0)^{n-1}}{n-1!}, \\ \qquad\qquad\qquad Y=y_0+\ldots, \ Z=z_0+\ldots, \end{array}\right\} \quad (K)$$