

# PRINCIPES DE LA ' THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVABLES D'après M. KOWALEWSKI

Autor(en): **Godefroy, Maurice**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5597>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PRINCIPES  
DE LA  
THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVABLES

D'APRÈS M. KOWALEWSKI

---

Le présent article a pour objet l'exposé des premières propriétés des fonctions dérivables d'après la méthode récemment indiquée par M. GERHARD KOWALEWSKI<sup>(1)</sup>, méthode qui, sans doute, intéressera les lecteurs d'une Revue dont le but est, avant tout, la discussion et le perfectionnement des études mathématiques.

Les deux propriétés fondamentales de la dérivée sont connues sous les noms de : *théorème de Rolle* et de *théorème des accroissements finis* ou *théorème de la moyenne*. La seconde de ces propositions, que l'on considère généralement comme une conséquence immédiate de la première, joue un rôle considérable en Analyse ; elle intervient, en effet, dans un grand nombre de questions importantes, et, notamment à propos des dérivées partielles, de la variation des fonctions, des séries, de la formule de Taylor, des règles de L'Hospital, des intégrales définies. Un théorème dont il est fait un usage si courant et qui sert à établir tant de vérités essentielles, mérite une démonstration exempte de toute critique. C'est en grande partie pour y parvenir que la théorie des ensembles, restreinte à ses éléments, a été introduite dans les meilleurs Traités d'Algèbre. On obtient, en effet, une démonstration absolument rigoureuse du théorème de Rolle en le déduisant du théorème de Weierstrass relatif aux limites maxi-

---

(<sup>1</sup>) *Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch physische Classe*, t. LII, 1900, p. 214-219.

maximum et minimum d'une fonction continue dans un intervalle déterminé. Une telle manière de procéder offre, toutefois, des inconvénients dont le principal est de faire appel à des notions d'un ordre assez élevé; car, si la théorie des ensembles ne présente aucune difficulté dès que l'on possède quelques idées générales sur les régions supérieures de l'Analyse, elle paraît d'une acquisition un peu délicate pour les jeunes intelligences encore imparfaitement pliées aux exigences de l'abstraction; aussi, beaucoup de professeurs préfèrent-ils prudemment la passer sous silence, les programmes officiels prescrivant de taire tout scrupule à l'égard des points de doctrine prêtant à controverse. On peut voir là le résultat d'une sorte de réaction contre l'excès du formalisme logique introduit en France dans l'Enseignement des Mathématiques à la suite de la publication du Mémoire de M. DARBOUX sur les fonctions discontinues, et développé surtout par l'Ouvrage de M. J. TANNERY sur la théorie des fonctions d'une variable et par le Cours d'Analyse de M. Jordan. Ce retour offensif contre l'abus d'une minutie peut-être exagérée a d'ailleurs été encouragé par des savants éminents tels que M. KLEIN <sup>(1)</sup> et M. POINCARÉ <sup>(2)</sup> qui ont, à bon droit, attiré l'attention sur les avantages pédagogiques de l'intuition. Sans s'étendre davantage sur ce débat, il importait de le rappeler brièvement à propos de la question dont il s'agit, parce que la solution nouvelle due à M. KOWALEWSKI, tout en restant générale, ménage la rigueur et la simplicité <sup>(3)</sup>. Elle ne nécessite, en effet, la connaissance préalable d'aucune théorie auxiliaire peu accessible aux débutants; en outre, on ne peut lui adresser aucune objection semblable à celle que KRONECKER <sup>(4)</sup> formulait au sujet du théorème de Weierstrass, à savoir : l'absence d'un procédé permettant de déterminer la limite maximum

<sup>(1)</sup> *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3<sup>e</sup> série, t. XVI, 1897, p. 126-128. — *Conférences sur les Mathématiques faites au Congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago*, trad. Laugel, p. 48-50.

<sup>(2)</sup> *L'Enseignement mathématique*, t. I, 1899, p. 157-162. — *Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens*, p. 115-130.

<sup>(3)</sup> Ces deux qualités ne sont nullement contradictoires, « de nombreux exemples nous montrent, au contraire, la méthode rigoureuse comme étant en même temps la plus simple et la plus aisée à saisir. » (HILBERT.)

<sup>(4)</sup> Voir une annotation de M. NETTO aux *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, p. 342. Cette remarque est empruntée à M. KOWALEWSKI.

et la limite minimum avec une exactitude arbitrairement fixée, ce qui donne à ce théorème un caractère un peu trop spéculatif. La méthode de M. KOWALEWSKI présente enfin le très grand avantage d'établir un parallélisme remarquable dans les raisonnements entre les propositions correspondantes de la théorie des fonctions dérivables et de la théorie des fonctions continues, les unes et les autres ne reposant que sur la définition des nombres irrationnels telle qu'elle est enseignée dans tous les Cours.

Je vais maintenant justifier ces appréciations en développant, avec quelques changements de forme toutefois, les démonstrations de M. KOWALEWSKI. Mais, avant d'entrer en matière, il n'est pas inutile de rappeler quelques définitions.

*Fonction dérivable.* — Une fonction  $f(x)$  est *dérivable* pour  $x = x_0$  si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite  $\lambda$  pour  $x = x_0$ ; c'est-à-dire, si  $\sigma$  désignant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un nombre positif  $\rho$  tel que, pour toutes les valeurs de  $x$ , autres que  $x_0$ , vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$\lambda - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \lambda + \sigma.$$

Cette limite est la *dérivée* de  $f(x)$  pour  $x = x_0$ .

Une fonction  $f(x)$  est *dérivable à droite* ou *dérivable à gauche* pour  $x = x_0$  suivant que le rapport des accroissements n'a qu'une limite à droite ou qu'une limite à gauche pour  $x = x_0$ ; cette limite est dite *dérivée à droite* ou *dérivée à gauche* de  $f(x)$  pour  $x = x_0$ <sup>(1)</sup>; les inégalités précédentes prennent alors l'une ou l'autre forme

$$\begin{array}{ll} 0 < x - x_0 < e, & -e < x - x_0 < 0, \\ \lambda - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \lambda + \sigma, & \lambda - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{array}$$

(1) Ces dénominations sont dues à M. J. TANNERY : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, p. 218-219.

Une fonction  $f(x)$  est *dérivable dans un intervalle*  $(a, b)$  quand elle est dérivable pour toutes les valeurs de  $x$  comprises entre  $a$  et  $b$  et que, de plus, elle admet au moins une dérivée à droite pour  $x = a$  et une dérivée à gauche pour  $x = b$ . Lorsqu'il en est ainsi, l'ensemble des dérivées de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(a, b)$  constitue une fonction de  $x$  qui est la *dérivée*  $f'(x)$  de  $x$  dans l'intervalle  $(a, b)$ . Cette fonction  $f'(x)$  est continue ou non.

Toute fonction dérivable est évidemment continue, mais, comme on le sait, toute fonction continue n'est pas dérivable; bien plus, d'après des recherches récentes, on devrait considérer comme une propriété singulière de la fonction continue celle d'avoir une dérivée <sup>(1)</sup>.

*Théorème de Rolle.* — La dérivée  $f'(x)$  d'une fonction  $f(x)$  dérivable dans un intervalle  $(a, b)$  s'annule au moins pour une valeur de  $x$  comprise dans cet intervalle si les nombres  $f(a)$  et  $f(b)$  sont égaux.

Si l'on partage l'intervalle  $(a, b)$  en  $m$  parties égales à  $\frac{b-a}{m}$ , deux moyens consécutifs  $x_1$  et  $x_2$  de la suite

$$a + \frac{b-a}{m}, a + 2 \frac{b-a}{m}, \dots, a + (m-1) \frac{b-a}{m}$$

substitués dans  $f(x)$  donnent des résultats  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  égaux ou inégaux; dans ce dernier cas, parmi les termes de la différence

$$f(b) - f(a) = [f(x_1) - f(a)] + [f(x_2) - f(x_1)] + f(b) - f(x_2) = 0,$$

il y en a nécessairement deux consécutifs de signes contraires, par exemple les deux premiers, ce qui revient à dire que des trois nombres  $f(a)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  le plus petit ou le plus grand est  $f(x_1)$ ; on peut alors déterminer un nombre  $y$  compris à la fois entre  $f(a)$  et  $f(x_1)$  et entre  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$ ; en effet, il suffit de prendre pour  $y_1$  le moyen entre  $f(x_1)$  et le plus voisin des nombres  $f(a)$  et  $f(x_2)$ . La fonction continue  $f(x)$  passe donc par la valeur  $y_1$  pour

<sup>(1)</sup> « C'est par exception qu'une fonction continue admet une dérivée » (BAIRE).

des valeurs de  $x$  intérieures, la première à l'intervalle  $(a, x_1)$  et la seconde à l'intervalle  $(x_1, x_2)$ , de sorte qu'il existe toujours, dans l'intervalle  $(a, b)$ , deux nombres  $a_1$  et  $b_1$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} f(a_1) &= f(b_1), \\ a &< a_1 < b_1 < b, \\ b_1 - a_1 &< (m-1) \frac{b-a}{m}. \end{aligned}$$

En opérant pareillement sur l'intervalle  $(a_1, b_1)$ , on trouvera encore deux nombres  $a_2, b_2$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} f(a_2) &= f(b_2), \\ a &< a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < b, \\ b_2 - a_2 &< (m-1)^2 \frac{b-a}{m^2}. \end{aligned}$$

Si l'on continue de la même manière, on forme deux suites de nombres

$$\begin{aligned} a, a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b, b_1, b_2, \dots, b_n, \end{aligned}$$

les premiers croissants, les seconds décroissants tels que l'on ait

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f(b_n), \\ a_n &< b_n, \\ b_n - a_n &< (m-1)^n \frac{b-a}{m^n}. \end{aligned}$$

La différence  $b_n - a_n$  tendant vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment, les deux suites ont une limite commune  $x_0$ ; et, comme  $x_0$  appartient à l'intervalle  $(a, b)$ , la fonction  $f(x)$  est dérivable pour  $x = x_0$ ; or, à moins d'être nuls, les termes de la différence

$$f(b_n) - f(a_n) = [f(b_n) - f(x_0)] + [f(x_0) - f(a_n)] = 0$$

ayant nécessairement des signes contraires, les deux rapports

$$\frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0}, \quad \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}$$

sont, ou nuls, ou de signes contraires; leur limite commune  $f'(x_0)$  est donc égale à zéro, car elle ne saurait être simultanément positive et négative.

Tel est le théorème de Rolle<sup>(1)</sup>. La démonstration qui vient d'en être donnée ne suppose pas la continuité de  $f'(x)$ , mais simplement son existence<sup>(2)</sup>.

**Théorème.** — La dérivée  $f'(x)$  d'une fonction  $f(x)$  dérivable dans un intervalle  $(a, b)$  passe par toutes les valeurs comprises entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$  lorsque  $x$  varie de  $a$  à  $b$ .

En effet, soit  $y'_0$  un nombre déterminé quelconque compris entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ ; si l'on considère la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - xy'_0,$$

elle est dérivable dans l'intervalle  $(a, b)$  et, de plus, les nombres

$$\varphi'(a) = f'(a) - y'_0, \quad \varphi'(b) = f'(b) - y'_0$$

sont des signes contraires puisque  $y'_0$  est compris entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ . Or, on peut choisir dans l'intervalle  $(a, b)$  des nombres  $x_1$  et  $x_2$  assez voisins, l'un de  $a$  et l'autre de  $b$  pour que les rapports

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(a)}{x_1 - a}, \quad \frac{\varphi(x_2) - \varphi(b)}{x_2 - b}$$

aient, le premier le signe de  $\varphi'(a)$  et le second celui de  $\varphi'(b)$ ; les dénominateurs étant de signes contraires, il en est de même des expressions

$$\varphi(x_1) - \varphi(a), \quad \varphi(b) - \varphi(x_2).$$

Si la différence  $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$  n'est pas nulle, elle est nécessairement d'un signe contraire à celui de l'une de ces deux expressions, de la première, par exemple, ce qui revient à dire que des trois nombres  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(x_1)$ ,  $\varphi(x_2)$ , le plus petit ou le plus grand est  $\varphi(x_1)$ ; on peut alors déterminer un nombre  $y_1$  qui soit compris à la fois entre  $\varphi(a)$  et  $\varphi(x_1)$  et entre  $\varphi(x_1)$  et  $\varphi(x_2)$ ; en effet, il suffit de prendre pour  $y_1$  le moyen entre  $\varphi(x_1)$  et le plus voisin des nombres  $\varphi(a)$  et  $\varphi(x_2)$ . La fonction continue  $\varphi(x)$  passe donc

(1) *Traité d'Algèbre*, p. 127. L'Ouvrage de Rolle date de 1689.

(2) A signaler, à ce propos, la démonstration élémentaire que M. DEMOULIN a donnée du théorème de Rolle dans le cas particulier où la dérivée est supposée continue. Voir : *Mathesis*, 3<sup>e</sup> série, t. II, 1902, p. 81-84.

par la valeur  $y_1$  pour des valeurs de  $x$  intérieures, la première à l'intervalle  $(a, x_1)$  et la seconde à l'intervalle  $(x_1, x_2)$ , de sorte qu'il existe toujours, dans l'intervalle  $(a, b)$ , deux nombres  $a_1$  et  $b_1$  tels que l'on ait

$$\varphi(a_1) = \varphi(b_1).$$

Il en résulte, d'après le théorème de Rolle, que  $\varphi'(x)$  s'annule pour une valeur  $x_0$  de  $x$  intérieure à l'intervalle  $(a_1, b_1)$  et l'on a

$$f'(x_0) = y'_0.$$

Ainsi la dérivée, qu'elle soit continue ou discontinue, possède comme la fonction continue, la propriété de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans atteindre toutes les valeurs intermédiaires <sup>(1)</sup>. Cette propriété ne saurait donc être prise pour définition de la continuité, comme le faisait GAUSS.

*Théorème des accroissements finis.* — Si la fonction  $f(x)$  est dérivable dans l'intervalle  $(a, b)$ , on a

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0),$$

le nombre  $x_0$  étant intérieur à l'intervalle  $(a, b)$ .

La formule de l'énoncé se déduit immédiatement du théorème de Rolle en appliquant ce théorème à la fonction

$$(x - a) [f(b) - f(a)] - (b - a) [f(x) - f(a)]$$

car, cette fonction s'annulant pour  $x = a$  et  $x = b$ , sa dérivée s'annule pour une valeur intermédiaire  $x_0$ , d'où il suit

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_0).$$

Il est facile d'établir cette formule directement. En effet, l'intervalle  $(a, b)$  étant partagé en  $m$  parties  $h$  égales à  $\frac{b-a}{m}$ , soit

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a};$$

<sup>(1)</sup> Voir, à ce sujet : DARBOUX, Mémoire sur les fonctions discontinues (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, 1875, p. 109-111).



la fonction  $\varphi(x)$  est continue dans l'intervalle  $(a-h, b-h)$ ; d'autre part, parmi les termes de la somme

$$\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \dots + \varphi(a+\overline{m-1}h) = 0,$$

il y en a nécessairement deux consécutifs qui sont de signes contraires pour des valeurs  $a+ph$ ,  $a+(p+1)h$ , sauf, peut-être, si l'un ou plusieurs de ces termes sont nuls.

Quoi qu'il en soit, la fonction  $\varphi(x)$  s'annulant toujours pour une valeur intermédiaire  $a_1$ , si l'on pose  $b_1 = a_1 + h$ , on voit qu'il existe, à l'intérieur de l'intervalle  $(a, b)$ , deux nombres  $a_1$  et  $b_1$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\ a &\leq a_1 < b_1 \leq b, \\ b_1 - a_1 &= \frac{b - a}{m}. \end{aligned}$$

En opérant pareillement sur l'intervalle  $(a_1, b_1)$ , on trouve encore deux nombres  $a_2, b_2$  tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\ a &\leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b, \\ b_2 - a_2 &= \frac{b - a}{m^2}. \end{aligned}$$

Si l'on continue de la même manière, on forme deux suites de nombres

$$\begin{aligned} a, a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b, b_1, b_2, \dots, b_n, \end{aligned}$$

les premiers non décroissants, les seconds non croissants, tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\ a_n &< b_n, \\ b_n - a_n &= \frac{b - a}{m^n}. \end{aligned}$$

La différence  $b_n - a_n$  tendant vers zéro lorsque  $n$  augmente indéfiniment, les deux suites ont une limite commune  $x_0$ , et

comme  $x_0$  appartient à l'intervalle  $(a, b)$ , la fonction  $f(x)$  est dérivable pour  $x = x_0$ ; par suite,  $\sigma$  désignant un nombre positif arbitrairement petit, pour des valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  suffisamment voisines de  $x_0$ , on a simultanément

$$f'(x_0) - \sigma < \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} < f'(x_0) + \sigma,$$

$$f'(x_0) - \sigma < \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} < f'(x_0) + \sigma,$$

ou, puisque les différences  $b_n - x_0$  et  $x_0 - a_n$  sont positives,

$$(b_n - x_0) [f'(x_0) - \sigma] < f(b_n) - f(x_0) < (b_n - x_0) [f'(x_0) + \sigma],$$

$$(x_0 - a_n) [f'(x_0) - \sigma] < f(x_0) - f(a_n) < (x_0 - a_n) [f'(x_0) + \sigma],$$

en ajoutant puis en divisant par la différence  $b_n - a_n$  qui est positive, on obtient

$$f'(x_0) - \sigma < \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} < f'(x_0) + \sigma,$$

et, on en conclut

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \quad (1)$$

Cette proposition, que l'on appelle indifféremment *théorème des accroissements finis* ou *théorème de la moyenne*, a été énoncée pour la première fois, par CAVALIERI (2) en langage géométrique. CAUCHY l'a donnée sous sa forme habituelle dans ses *Leçons sur le Calcul différentiel* (3) qui datent de 1829; c'est donc à tort qu'on l'attribue quelquefois à OSSIAN BONNET.

Maurice GODEFROY (Marseille)

(1) Dans la démonstration du théorème de Rolle, on aurait pu employer le même raisonnement. La limite du rapport  $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$  est égale à  $f'(x_0)$  lorsque  $a_n$  et  $b_n$  tendent vers leur limite commune de telle sorte que  $a_n$  reste toujours inférieur à  $b_n$ . Si la loi de variation de  $a_n$  et  $b_n$  est quelconque, la limite du rapport n'est  $f'(x_0)$  que dans le cas où la dérivée est continue. Voir, sur cette question, une Note de M. PEANO, dans *Mathesis*, 2<sup>e</sup> série, t. II, 1892, p. 12-14.

(2) *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, livre VII, p. 15. Cet ouvrage fut publié à Bologne en 1635.

(3) *Œuvres complètes*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, p. 312-313.