

L'ATOME DANS LA GÉOMÉTRIE (1)

Autor(en): **Bonnel, J.-F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1902)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5574>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'existence des nombres transcendants a été établie pour la première fois par LIOUVILLE dans ses mémoires publiés en 1844 et en 1851. Leur théorie a été établie par G. CANTOR, HERMITE, LINDEMANN, WEIERSTRASS et HILBERT.

C'est Hermite qui, le premier, fournit un exemple effectif de nombre transcendant. Dans un mémoire célèbre, publié en 1873, il démontre que e n'est pas un nombre algébrique, c'est-à-dire, qu'une équation de la forme

$$a_1 e^n + a_2 e^{n-1} + a_3 e^{n-2} + \dots + a_{n-1} e + a_n = 0$$

les a étant entiers, est impossible.

Plus tard, en 1882, M. LINDEMANN généralise la méthode de Hermite et parvient à démontrer que π est transcendant. Son mémoire est d'une importance considérable non seulement pour la théorie des nombres transcendants, mais encore pour la Géométrie élémentaire. Il apporte, en effet, la démonstration rigoureuse de l'impossibilité de la résolution du problème de la quadrature du cercle à l'aide de la règle et du compas.

H. FEHR.

L'ATOME DANS LA GÉOMÉTRIE ⁽¹⁾

Convient-il d'introduire la considération de l'atome dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire ? Cette introduction nous paraît à la fois utile et nécessaire.

Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von Tägert (Leipzig, 1895) ; rédaction française par Griess, Paris, 1897. On y trouve un intéressant chapitre consacré à la possibilité de la construction d'expressions algébriques.

(¹) En nous envoyant cet article, M. Bonnel se demande si nous ne le jugerons pas trop long et d'un ton trop autoritaire. Il nous semble très naturel que chaque auteur donne au développement de sa pensée l'étendue (compatible avec le cadre de notre Revue), qu'il juge nécessaire, et qu'il défende ses idées de toute la force de sa conviction. Aussi, fidèle au principe d'indépendance complète qu'elle s'est toujours efforcée d'appliquer, la Rédaction accueille-t-elle avec empressement la présente étude ; elle en fera de même pour celles que M. Bonnel compte consacrer

Nous supposerons que l'atome est défini, dans chaque espèce de grandeurs, comme « la plus petite de toutes les grandeurs indéfiniment petites de cette espèce » et, sans perdre de vue cette définition, nous examinerons quel rôle peut jouer l'atome dans une démonstration faite par le procédé des limites, basée sur la divisibilité à l'infini.

Prenons pour type la circonférence d'un cercle dont on se propose de définir la longueur comme « limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. » Personne ne conteste qu'il est possible d'inscrire à un cercle un polygone régulier dont le côté soit de plus en plus petit et même plus petit qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit. Mais, quelque petite que soit la quantité donnée, si l'on s'y arrête, on est encore très loin de la limite qu'on veut obtenir et prendre pour définition ; et le plus simple bon sens nous dit que cette limite, dont l'existence est d'ailleurs démontrée, ne sera atteinte que dans le cas où le côté du polygone sera devenu assez petit pour qu'il n'y en ait pas de plus petit : c'est ce polygone, ou du moins son périmètre, qui sera la limite cherchée, pour cette raison que, son côté n'en ayant pas de plus petit que lui, il est impossible, soit en acte, soit en pensée, de le subdiviser. Or, quel est cet élément minuscule qui marque ainsi l'arrêt forcé de l'opération matérielle ou fictive qu'on avait conduite jusque là ? Ce n'est pas un point : le point est un zéro ou néant d'étendue ; et, en bonne logique, si l'on a pu arriver par une série d'opérations au résultat quel qu'il soit qu'on se proposait d'obtenir, il faut qu'on puisse refaire en sens inverse la même série d'opérations, et revenir au point de départ, qui est ici le périmètre du premier polygone inscrit ; nous pensons que c'est là un principe indiscutable. Mais, avec un point, deux points, trois points,

à une exposition ultérieure du sujet. Mais il nous semble indispensable de faire des réserves sur l'utilité de l'introduction de ces notions dans l'enseignement de la Géométrie, du moins dans l'enseignement élémentaire. Autant elles sont intéressantes et originales au point de vue philosophique et pour des esprits déjà préparés et mûris par une instruction antérieure, autant nous redouterions sur l'intelligence des commençants l'influence de théories qui abolissent l'idée première de continuité ; car celle-ci nous apparaît comme l'un des premiers postulats indispensables dans l'initiation à l'étude de l'étendue. (NOTE DE LA RÉDACTION.)

autant de points qu'on voudra, on ne reconstituera pas le plus petit de tous les côtés que puisse avoir un polygone; zéro multiplié par un nombre quelconque donne toujours zéro. Le dernier élément de la longueur n'est donc pas un point, parce que le point n'a pas d'étendue. Il faut noter d'ailleurs que ce dernier élément est indivisible, sans quoi on ne serait pas forcé de s'y arrêter. Donc, cet élément doit posséder cette double qualité : avoir de l'étendue et être indivisible; il ne peut être, par conséquent, que la plus petite de toutes les longueurs indéfiniment petites, c'est-à-dire l'atome linéaire.

L'atome linéaire résulte d'ailleurs de beaucoup d'autres considérations plus simples. Si l'on considère, par exemple, sur une droite un point fixe et un point mobile, se rapprochant du point fixe de manière à venir finalement se confondre avec lui, il est clair que la distance des deux points, après avoir diminué, finira par être nulle. Or, immédiatement avant que d'être nulle, cette distance a dû prendre une valeur très petite, qui n'était pas encore nulle, et qui pourtant se trouvait moindre que toutes les valeurs précédentes; cette distance, la plus petite de toutes les distances indéfiniment petites des deux points, est l'atome de longueur.

Inversement, si l'on considère la distance de deux points dont l'un s'éloigne de l'autre, après avoir été confondu avec lui, il est impossible d'admettre que cette distance, de nulle qu'elle était, prenne une valeur quelconque sans commencer par en prendre une qui n'est pas nulle et qui est pourtant plus petite que toutes celles qu'elle prendra dans la suite; c'est encore l'atome de longueur.

Cela n'est point particulier aux longueurs. D'une manière générale, on ne conçoit pas qu'une grandeur quelconque puisse varier de l à 0 ou de 0 à l sans passer par l'état d'atome, soit en naissant, soit en s'évanouissant. Il y a donc autant d'espèces d'atomes que d'espèces de grandeurs, et plus on y réfléchira, plus on en sera convaincu.

En ce qui concerne la théorie des limites, on se heurte quelquefois à une objection assez vaine, qui consiste à mettre en doute qu'il y ait un point d'arrêt forcé, lorsqu'on divise une droite en parties de plus en plus petites, ou lorsqu'on inscrit à

un cercle un polygone régulier dont les côtés sont de plus en plus petits. Rien, se dit-on, n'oblige à s'arrêter dans l'opération commencée, car elle peut très bien se concevoir comme ne finissant jamais ; c'est même là ce qu'on veut exprimer quand on dit que l'opération peut se prolonger indéfiniment, et cela n'empêche pas d'affirmer qu'il y a une limite vers laquelle tend le périmètre du polygone inscrit, sans rencontrer un côté tellement petit qu'il n'y en ait pas de plus petit que lui, c'est-à-dire sans rencontrer l'atome. C'est bien là, je crois, le fond de l'objection qu'on se fait communément.

Pour répondre à cette objection, nous remarquerons d'abord qu'il paraît bien étrange qu'en vue de former une définition aussi élémentaire que celle de la longueur d'un arc de cercle, on ait recours à une opération qui ne finit jamais et à une décomposition qui donne une infinité de parties. L'éternité et l'infini sont des idées difficiles à manier par des commençants ; et Galilée a démontré d'ailleurs qu'on ne saurait admettre, sans contradiction dans les termes, qu'il existe une suite quelconque composée d'un nombre infini de termes. Mais enfin, si vous êtes sûr de concevoir assez nettement la portée du mot *infini* pour l'utiliser dans cette définition et si, grâce à lui, vous croyez pouvoir fixer votre limite et l'imposer comme telle au périmètre croissant du polygone inscrit, ce qui est le but final du raisonnement, vous accorderez bien que je puisse concevoir la même chose aussi nettement que vous, traverser comme vous sans encombre votre infinité d'opérations et revenir, avec la pensée, par le chemin que votre pensée aura suivi, mais en sens inverse, de votre limite fixe à votre point de départ. Je vous poserai alors la même question qu'avant l'objection : les éléments (poussière de droite ou de périmètre) qui composent votre limite, future longueur d'une circonférence, sont-ils des points ? Si vous dites « non », j'en conclus que ce sont des atomes, car il faut bien que ces éléments soient quelque chose. Si, vous rabattant sur l'éternité, vous dites « oui, ce sont des points, mais il y en a une infinité et l'on sait, après tout, que zéro multiplié par l'infini, donne un produit qui peut ne pas être nul », je vous le concède ; mais on sait aussi que le produit, $0 \times \infty$ est un symbole de l'indétermination, et vous ne prétendez pas, j'imagine, prendre ici comme

définition une limite indéterminée, que la pensée ne peut pas atteindre et dont vous ignorez tout, si ce n'est qu'elle existe.

La conclusion reste donc entière ; toute démonstration ayant pour objet de définir une grandeur quelconque comme limite d'une grandeur variable qui s'approche indéfiniment d'une autre grandeur variable, est sans valeur logique, si elle est basée sur la divisibilité à l'infini ; elle devient théoriquement acceptable, si elle est basée sur l'atome, par le fait qu'elle se trouve débarrassée de tout ce que contient d'insaisissable le mystérieux passage de l'atome à zéro et qu'il n'y a plus à considérer qu'une suite infinie d'opérations au lieu d'une suite infinie. Mais il faudrait désespérer de la logique géométrique, si l'atome ne nous apportait pas une solution encore plus simple de la question ; cette solution plus simple se résume en deux mots : l'atome supprime le procédé des limites dans les définitions, en supprimant l'incommensurable.

Tout le monde reconnaîtra qu'en disant : « Deux lignes (droites ou courbes) sont égales lorsque ces deux lignes peuvent coïncider par superposition », on énonce une phrase absolument vide de sens, si l'on n'entend pas par là que ces deux lignes sont égales en longueur. Laissez de côté, en effet, l'idée de leur longueur, et vous ne trouvez plus rien à considérer dans leur coïncidence par superposition. Cela tient à ce qu'on ne peut pas concevoir une ligne sans qu'elle ait « plus ou moins d'étendue dans la seule dimension qu'elle possède », c'est-à-dire sans qu'elle ait la qualité d'être longue ; cela tient aussi à ce que cette conception est primordiale, et, par suite, complètement indépendante de la question de sa mesure, qui n'est qu'une question pratique. Mais, si toute ligne a une longueur, l'atome linéaire, qui est une ligne, a aussi une longueur, la plus petite de toutes. A cet atome, si l'on ajoute successivement un, deux, trois, quatre... atomes, on aura évidemment formé une ligne ; or, d'une part, comme ces atomes sont nécessairement égaux entre eux, c'est leur nombre seul qui détermine la longueur de la ligne ; d'autre part, comme ces atomes ne sont, ni droits, ni courbes, c'est leur disposition relative qui seule détermine la forme de la ligne, autrement dit son espèce dans le genre ligne. On peut donc dire que deux lignes quelconques ont toujours pour commune mesure l'atome

de longueur, sinon un multiple de cet atome, et qu'il n'y a pas de lignes, à proprement parler, incommensurables entre elles, c'est-à-dire n'ayant aucune commune mesure. La diagonale d'un carré et son côté sont des droites ayant pour mesure commune l'atome et pas d'autre ; il en est de même de la circonférence d'un cercle et de son rayon. Ce qui est vrai pour les lignes est vrai aussi pour les surfaces et pour les volumes.

S'il n'y a pas de grandeurs incommensurables entre elles, il n'y a pas de nombre incommensurable avec l'unité ; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , ... sont des nombres qui ont pour diviseur commun avec l'unité l'atome numérique ou le plus petit de tous les nombres. La considération de l'atome supprime donc l'incommensurable, et elle rend superflu, après l'avoir rendu acceptable, le procédé usuel des limites, dans les définitions géométriques.

J.-F. BONNEL (Lyon).

SUR LES HEPTAGONES ET LES ENNÉAGONES RÉGULIERS

Etant à l'Ecole Polytechnique j'ai trouvé ces *théorèmes* qui ne sont peut-être pas encore connus :

I. — *Le côté de l'ennéagone régulier étoilé $2 \sin \frac{4\pi}{9}$ est égal à la somme des côtés de l'autre ennéagone régulier étoilé $2 \sin \frac{2\pi}{9}$ et de l'ennéagone régulier convexe $2 \sin \frac{\pi}{9}$.*

Démonstration : Il faut trouver zéro pour l'expression

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)$$

qui s'écrit

$$\sin \frac{4\pi}{9} - 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18},$$