REMARQUES SUR LES BISSECTRICES D'UN ANGLE

REMARQUES SUR LES BISSECTRICES D'UN ANGLE

1. — La détermination de la bissectrice de l'angle formé par deux droites, en Géométrie analytique, donne lieu habituellement à une difficulté qu'il semble aisé de lever. En considérant la bissectrice comme le lieu des points également distants des deux droites données, en Géométrie plane, on trouve simultanément les deux bissectrices; et si on les sépare, comment distinguer celle qui divise en parties égales l'angle aigu, de celle qui divise l'angle obtus ?

Prenons tout de suite le problème ainsi posé dans l'espace ; et tout d'abord, pour plus de simplicité, considérons deux droites passant par l'origine, OD, OD'. Leurs équations seront

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, \qquad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'},$$

et nous pouvons supposer que α, β,... satisfassent aux conditions $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$, c'est-à-dire que ces quantités soient des cosinus directeurs. Mais il y a ambiguïté, pour chacune des droites, en ce sens que α, β, γ, ou α', β', γ' peuvent être simultanément changées de signes sans que les équations soient changées. Autrement dit, les équations représentent à la fois une demi-droite et la demi-droite opposée.

Prenons les équations telles qu'elles sont données, et appelons M le point qui a pour coordonnées α, β, γ et M' celui qui a pour coordonnées α', β', γ'. La somme géométrique OM + OM' sera la bissectrice de l'angle MOM', et l'extrémité de cette somme a pour coordonnées $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$, si bien que les équations de l'une des bissectrices sont

$$\frac{x}{\alpha+\alpha'}=\frac{y}{\beta+\beta'}=\frac{z}{\gamma+\gamma} \tag{1}$$

celles de l'autre bissectrice étant

$$\frac{x}{\alpha - \alpha'} = \frac{y}{\beta - \beta'} = \frac{z}{\gamma - \gamma'}. \tag{2}$$

Il s'agit de savoir laquelle divise en parties égales l'angle aigu, et laquelle l'angle obtus.

Or nous avons, *sans ambiguïté*,

$$\text{Cos MOM}' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

Si donc MOM' est aigu, $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' > 0$; alors (1) est le système des équations de la bissectrice de l'angle aigu et (2) celui des équations de la bissectrice de l'angle obtus. Ces conclusions sont renversées si $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' < 0$. Si les deux droites données sont rectangulaires, $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, et la question ne se pose plus.

On peut encore dire qu'on changera s'il le faut les signes des coefficients dans les équations de l'une des droites, de telle sorte que $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ soit positif, et qu'alors le système (1) représentera toujours la bissectrice de l'angle aigu.

2. — Si les droites ne passaient pas par l'origine, mais par un point commun (a, b, c) il est évident que les équations des bissectrices seraient

$$\frac{x-a}{\alpha + \alpha'} = \frac{y-b}{\beta + \beta'} = \frac{z-c}{\gamma + \gamma'},$$

et

$$\frac{x-a}{\alpha - \alpha'} = \frac{y-b}{\beta - \beta'} = \frac{z-c}{\gamma - \gamma'}.$$

Le premier système représentera la bissectrice de l'angle aigu ou de l'angle obtus, suivant que $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ sera positif ou négatif.

3. — Tout ce que nous venons de dire s'applique au cas plus simple de la Géométrie plane; il n'y a qu'à remplacer $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ par $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, en supposant que les équations des deux droites aient été écrites sous la forme

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta}, \qquad \frac{x-a}{\alpha'} = \frac{y-b}{\beta'}.$$

Si, comme on le fait souvent, on a écrit

$$y - b = m(x-a), \quad y - b = m'(x-a),$$

on remarquera que

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+m'^2}}, \quad \beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \beta' = \frac{m'}{\sqrt{1+m'^2}},$$

et que nous pouvons toujours prendre positivement les radicaux. Dès lors, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ a le même signe que $1 + mm'$. Quant aux équations des deux bissectrices, elles sont

$$\frac{y-b}{\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}} + \dfrac{m'}{\sqrt{1+m'^2}}} = \frac{x-a}{\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+m'^2}}},$$

$$\frac{y-b}{\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}} - \dfrac{m'}{\sqrt{1+m'^2}}} = \frac{x-a}{\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+m'^2}}},$$

et la première équation représente la bissectrice de l'angle aigu ou de l'angle obtus, respectivement, suivant que $1 + mm'$ est positif ou négatif.

4. — Le même problème peut se poser pour les plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans donnés. Nous allons en indiquer une solution, un peu différente de la précédente en apparence, mais au fond qui revient au même.

Soient

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + p = 0,$$
$$P' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + p' = 0,$$

les équations de deux plans donnés (P) et (P′), en supposant que les coefficients α, β, ... aient été préalablement ramenés à satisfaire aux conditions $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$. Les deux plans bissecteurs (P_1) et (P_2) des dièdres formés par (P), (P′) ont pour équation

$$(P_1) \qquad (\alpha + \alpha')x + (\beta + \beta')y + (\gamma + \gamma')z + p + p' = 0,$$
$$(P_2) \qquad (\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z + p - p' = 0.$$

Pour distinguer entre ces deux plans celui qui est bissecteur des dièdres aigus et celui des dièdres obtus, nous pouvons remarquer que si l'on prend un point M quelconque sur l'un des deux plans donnés, et si l'on considère les distances MD_1, MD_2 aux plans (P_1), (P_2), la plus grande de ces distances correspond au plan bissecteur des dièdres obtus, et la plus courte à celui des dièdres aigus. Il nous suffit donc de comparer les carrés de ces distances qui sont, en appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M,

$$\delta_1^2 = \frac{[(\alpha+\alpha')x_0 + (\beta+\beta')y_0 + (\gamma+\gamma')z_0 + p + p']^2}{(\alpha+\alpha')^2 + (\beta+\beta')^2 + (\gamma+\gamma')^2},$$

$$\delta_2^2 = \frac{[(\alpha-\alpha')x_0 + (\beta-\beta')y_0 + (\gamma-\gamma')z_0 + p - p']^2}{(\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 + (\gamma-\gamma')^2},$$

ou, en vertu des hypothèses que nous avons faites,

$$\delta_1^2 = \frac{(\alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0 + p')^2}{2(1 + \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')},$$

$$\delta_2^2 = \frac{(\alpha' x_0 + \beta' y_0 + \gamma' z_0 + p')^2}{2(1 - \alpha\alpha' - \beta\beta - \gamma\gamma')}.$$

On aura par conséquent

$$\delta_1^2 \gtrless \delta_2^2.$$

Suivant que

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \lessgtr 0.$$

Donc le plan ayant pour équation

$$P + P' = 0$$

sera bissecteur des dièdres aigus si $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' > 0$, et des dièdres obtus si $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' < 0$.

Naturellement, si $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, les deux plans donnés sont rectangulaires, et la question n'existe plus.

Nous nous permettons d'attirer, en terminant, l'attention des professeurs sur cette question bien simple, parce qu'elle nous paraît offrir un intérêt pédagogique qui peut se présenter dans d'autres cas. Elle oblige l'attention à se porter sur certaines distinctions géométriques qu'on laisse quelquefois confondues, parce que les formes analytiques les englobent. C'est ainsi qu'on pourrait dire à la rigueur que les deux équations $ax + by + c = 0$, $-ax - by - c = 0$ représentent deux demi-droites distinctes, opposées l'une à l'autre, et que les équations $ax + by + cz + d = 0$, $-ax - by - cz - d = 0$ représentent les deux faces d'un même plan.

C.-A. LAISANT.