

# LES IDÉES D'AUGUSTE COMTE SUR LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Vassilief, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3559>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LES IDÉES D'AUGUSTE COMTE

SUR LA

PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES (1)

---

Cent ans se sont écoulés depuis le 19 janvier 1798, jour de la naissance d'Auguste Comte.

Depuis sa jeunesse jusqu'aux derniers jours de sa vie, ce philosophe a constamment cherché à réaliser cet idéal : rétablir sur des bases nouvelles l'union des esprits que l'on possédait au moyen âge, quand l'Europe occidentale n'avait qu'un seul chef d'église, le pontife des catholiques.

Ce rêve d'Auguste Comte ne s'est jamais accompli : il faut reconnaître en effet qu'en dépit des efforts de Comte, l'anarchie intellectuelle, que lui-même croyait être un des plus grands maux de l'humanité, n'en subsiste pas moins et se manifeste dans l'appréciation, souvent si opposée, de l'œuvre de Comte. Tandis que ses adeptes peu nombreux, mais parsemés par tous les coins de la terre, voient en lui le fondateur d'une nouvelle religion, çà et là s'élèvent des voix qui lui refusent toute importance philosophique ; on va même jusqu'à dire que ses idées furent les visions d'un fou. Il y a quelques années, parurent dans la *Revue des Deux-Mondes* les articles du célèbre mathématicien Joseph Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, articles consacrés à la mémoire de Comte. L'un de ces articles finit par ces mots : « Les pensionnaires de Charenton sont nombreux ; presque tous sont plus fous qu'Auguste Comte, mais j'en ai connu qui l'étaient moins ! ».

Il faut dire pourtant qu'il y a des gens d'une opinion intermédiaire, qui voient dans le *Cours de philosophie positive* de Comte,

---

(1) Traduit du journal philosophique de Moscou (*Voprossy filosofii i psichologii*; 1899), par M<sup>lle</sup> A. GROMEKA.

ainsi que dans le *Traité de la méthode* de Descartes, la plus brillante manifestation de la philosophie généralisatrice du peuple français. Les mêmes personnes croient également que l'introduction de la sociologie dans le cours des sciences positives, introduction due à Comte, est un grand service qu'il a rendu à la pensée humaine. Quant à l'importance des idées de Comte relativement à la philosophie des autres sciences particulières, c'est une question dont on s'est peu occupé. Or, la présente étude a précisément pour but d'attirer l'attention sur celles des idées de Comte concernant la philosophie des mathématiques et qui ont été confirmées plus tard par le développement des sciences mathématiques.

Dans les œuvres des grands penseurs, ce qui mérite vraiment notre attention, ce sont celles de leurs idées qui ont été en quelque sorte comme des jalons plantés sur le chemin de la pensée humaine ; quant à leurs erreurs, il n'y a ni intérêt ni utilité à les rechercher.

## I

Un talent mathématique exclusif qui se manifesta chez Comte dès sa première jeunesse le décida à entrer en 1814 à l'École Polytechnique, laquelle alors, comme aujourd'hui, était en France le centre de toute éducation mathématique sérieuse. Dans une liste des candidats, dressée par un des quatre examinateurs, il fut inscrit le premier ; dans les autres listes, les premiers furent Duhamel et Lamé. Pendant tout le temps que Comte a passé à l'École Polytechnique, ses talents et son application lui valurent la bienveillance de ses illustres maîtres Poinsot et Navier.

En 1816, les malentendus de Comte avec un des répétiteurs de l'École, Lefébure de Fourey (auteur d'un manuel bien connu de Géométrie analytique), l'obligèrent à suspendre ses études à l'École Polytechnique. Après avoir vainement cherché à devenir secrétaire de Casimir-Périer, le futur ministre de Louis-Philippe, Auguste Comte se voua à l'enseignement privé des mathématiques élémentaires. Cette occupation lui laissa assez de temps libre pour la lecture, l'étude et la préparation de ses six volumes de Philosophie positive, volumes dont le premier, paru en 1830, contient l'exposé des cours que Comte fit en 1829 devant un

auditoire choisi où l'on comptait entre autres Fourier, Poinsot, Navier et Blainville.

En 1832, Comte, recommandé par Navier, fut nommé répétiteur d'Analyse et de Mécanique à l'École Polytechnique; et, après la mort de Navier, il occupa temporairement sa chaire. Cette place fut définitivement offerte à Duhamel, et à ce propos Bertrand raconte le trouble que ce changement de professeur provoqua à l'École Polytechnique, où les étudiants étaient ravis de l'enseignement de Comte. Dès la première conférence, Duhamel s'opposa à l'idée favorite de Comte — l'admission des séries divergentes — et prouva la nécessité de s'assurer d'avance de la convergence des séries dont on s'occupe dans l'Analyse. La démonstration de Duhamel prouve une plus parfaite connaissance des mathématiques contemporaines; car après les travaux d'Abel et de Cauchy il n'était que juste de prêter plus d'attention à la convergence des séries. Mais il serait quand même intéressant d'étudier les idées de Comte sur les séries divergentes qui, encore aujourd'hui, jouent un rôle important dans les mathématiques pures et dans la Mécanique céleste. Il y a trois années en effet, en 1897, l'Académie des sciences de Paris proposait au concours du Grand Prix des sciences mathématiques la question suivante : quel rôle les séries divergentes jouent-elles dans l'Analyse?

Si Comte ne fut pas choisi comme professeur à la chaire d'Analyse, l'année suivante, en revanche, il obtint une place bien importante, celle d'examineur d'admission des candidats à l'École Polytechnique. Les questions qu'il posait à ces derniers passent pour des modèles du genre. Elles étaient assez simples pour être résolues par tout candidat bien préparé, et en même temps assez compliquées pour que les meilleurs pussent montrer leur talent.

Cette situation assura la vie matérielle de Comte pendant les sept années qu'il l'occupa, mais son amour-propre y était constamment mis à l'épreuve. Son prédécesseur Reynaud s'était vu déposséder de son emploi parce qu'il avait profité de son poste pour répandre son cours de Géométrie analytique. Aussi, après la démission de Reynaud, la situation d'examineur cessa-t-elle d'être inamovible. Désormais, l'on dut être réélu chaque année. Comte, que l'on nommait sous ces conditions et qui venait en

outre d'échouer dans sa candidature à la place de professeur d'Analyse, place qui fut donnée à Sturm (1840), en conçut de l'irritation contre le Conseil de l'École ; et dans la préface du sixième volume de son Cours de philosophie positive, il attaqua ce Conseil comme représentant la classe des spécialistes : classe nuisible à l'enseignement. La conséquence de tout ceci fut pour Comte l'obligation de donner sa démission d'examineur (1844).

On lui reprochait : 1° D'avoir édité en 1843 un traité de Géométrie analytique malgré le décret du Conseil qui défendait aux examinateurs de publier des ouvrages d'un caractère élémentaire, pouvant aider les candidats dans leur préparation aux examens ; 2° De poser chaque année aux candidats les mêmes questions, de sorte que les écoles préparatoires s'occupaient bien plus des questions que posait Comte que des études générales (<sup>1</sup>).

Tous ces déboires augmentaient son irritation contre ses chefs et ses collègues, irritation qu'il ne prenait d'ailleurs pas la peine de dissimuler. La conséquence fut qu'en 1852, Comte perdait sa place de répétiteur à l'École Polytechnique. Privé ainsi de tout moyen d'existence, Comte fut obligé jusqu'à sa mort (5 septembre 1857) de vivre exclusivement à la charge de ses adeptes qui croyaient voir en lui en même temps l'Aristote de la nouvelle philosophie et le Saint Paul de la nouvelle religion. Sa démission du poste de répétiteur était motivée par ces deux faits : abréviation du temps consacré aux répétitions (or, Comte se justifiait en alléguant son expérience qui lui permettait de gagner cinq minutes sur chaque élève) et refus systématique de répéter la théorie des probabilités, à laquelle Comte refusait toute importance.

Telle est en gros la vie d'Auguste Comte comme mathématicien et pédagogue. Les archives de l'École Polytechnique contiennent sans doute beaucoup de données qui permettraient de se renseigner plus exactement sur sa biographie. Ce que nous appor-

---

(<sup>1</sup>) Comte lui-même crut voir la cause de son insuccès, en partie dans l'antipathie qu'il inspirait à Arago, en partie dans la radicale contradiction qui existait entre son école philosophique et les tendances pédantocratiques des savants. Dans plusieurs de ses lettres adressées au ministre de la guerre (lettres imprimées dans le livre paru en 1877 sous le titre : *Lettres d'Auguste Comte à John Stuart Mill*) il engage ce ministre à procéder lui-même au choix des examinateurs.

tons est emprunté à M. P. Laffite<sup>(1)</sup>, l'un des disciples de Comte les plus dévoués et qui, après la mort du philosophe, devint l'un des chefs des orthodoxes du positivisme. Dans cet article sont imprimées les observations dont Comte accompagnait la réponse de chacun des élèves. Elles témoignent de l'attention avec laquelle il accomplissait ses devoirs d'examineur et de sa connaissance nette et précise des mathématiques. Le traité de Géométrie analytique, qu'il a publié en 1843, ne contient pas de nouvelles déductions ; il est consacré au développement des idées relatives à l'importance et au système de la Géométrie analytique, idées qu'il avait exposées auparavant dans sa Philosophie positive. Mais s'il n'a pas donné aux mathématiques de nouvelles déductions, il leur a néanmoins rendu de grands services en présentant une revue systématique de ses principales doctrines, revue toute pénétrée d'un esprit de philosophie généralisatrice. On trouve, il est vrai, dans les œuvres des mathématiciens du xvii<sup>e</sup> et du xviii<sup>e</sup> siècles, des idées sur les principes et sur la méthode des mathématiques ; et Carnot a consacré un volume entier à la métaphysique du Calcul infinitésimal. Mais personne ne donna un exposé aussi logique et aussi profond des questions principales de la philosophie des mathématiques, que celui présenté par Comte dans son ouvrage, publié en 1830.

## II

Dans le premier volume de la Philosophie positive, les leçons 3-14 sont consacrées à la philosophie des mathématiques<sup>(2)</sup>, y compris la Géométrie. Dans la seconde leçon, Comte établit une hiérarchie entre les sciences (hiérarchie fondée sur la transition graduelle des sciences, depuis celles qui s'occupent des phéno-

<sup>(1)</sup> Auguste Comte examinateur d'admission à l'École Polytechnique (*Nouvelles annales de mathématiques*, t. XIII (1894), p. 68-80, 113-120, 405-428 et 462-482).

<sup>(2)</sup> Comte a écrit encore deux livres sur le même sujet : *Essais sur la philosophie des mathématiques* (1822) et *Synthèse subjective ou système universel des conceptions propres à l'état normal de l'humanité* ; Tome premier ; *Le système de logique positive ou traité de Philosophie mathématique*. Paris, 1856. La première de ces œuvres est une curiosité bibliographique ; quant au second, il ne présente aucun intérêt scientifique. Les études des mathématiques y sont considérées comme l'école préparatoire des serviteurs de l'humanité.

mènes les plus simples jusqu'à celles qui s'occupent de phénomènes plus spéciaux et plus compliqués) et considère les mathématiques comme une pierre fondamentale de la Philosophie positive ; il en détermine l'importance dans les termes suivants :

« Dans l'état actuel du développement de nos connaissances positives, il convient, je crois, de regarder la science mathématique, moins comme une partie constituante de la Philosophie naturelle proprement dite, que comme étant, depuis Descartes et Newton, la vraie base fondamentale de toute cette philosophie, quoique, à parler exactement, elle soit à la fois l'une et l'autre. Aujourd'hui, en effet, la science mathématique est bien moins importante par les connaissances, très réelles et très précieuses néanmoins, qui la composent directement, que comme constituant l'instrument le plus puissant que l'esprit humain puisse employer dans la recherche des lois des phénomènes naturels. » <sup>(1)</sup>

Sous le nom commun de sciences mathématiques, comme le dit Comte, on doit distinguer deux sciences bien séparées par leur caractère : la Mathématique abstraite ou le calcul ; et la Mathématique concrète, qui se compose de la Géométrie générale et de la Mécanique rationnelle.

La Mathématique abstraite est une admirable adaptation de la Logique naturelle à une certaine série de déductions. « La Géométrie et la Mécanique doivent, au contraire, être envisagées comme de véritables sciences naturelles, fondées, ainsi que toutes les autres, sur l'observation, quoique par l'extrême simplicité de leurs phénomènes elles comportent un degré infiniment plus parfait de systématisation qui a pu quelquefois faire méconnaître le caractère expérimental de leurs premiers principes. » <sup>(2)</sup> Dans l'une des premières leçons consacrées à l'étude de la Géométrie, Comte examine, si elle est une science purement rationnelle, indépendante de l'observation, ou bien au contraire une science naturelle, mais bien plus simple et par conséquent plus parfaite, que toute autre : « Il est néanmoins évident pour quiconque examine avec attention le caractère des raisonnements géométriques, que si les faits qu'on y considère sont beaucoup plus

<sup>(1)</sup> *Cours de philosophie positive* ; t. I (édit. 1830), p. 112.

<sup>(2)</sup> *Ibid.*, t. I, p. 113.

liés entre eux, que ceux relatifs à toute autre science, il existe toujours cependant, par rapport à chaque corps étudié par les géomètres, un certain nombre de phénomènes primitifs qui, n'étant établis par aucun raisonnement, ne peuvent être fondés que sur l'observation et constituent la base nécessaire de toutes les déductions. L'erreur commune à cet égard doit être regardée comme un reste d'influence de l'esprit métaphysique, qui a si longtemps dominé, même dans les études géométriques. » <sup>(1)</sup>

L'opinion de Comte, qui reconnaissait la Géométrie, ainsi que la Mécanique, comme sciences expérimentales, était tout opposée aux doctrines philosophiques qui régnaient sur le continent. Le nombre des savants qui, ayant mûrement réfléchi aux bases de la Géométrie, étaient du même avis que Comte, était fort restreint. Parmi eux il faut citer Gauss qui, dans sa correspondance privée, dit souvent que la Géométrie, semblable à la Mécanique, dépend de l'expérience <sup>(2)</sup>. Lobatchevsky dit dans le travail qu'il lut le 12 février 1826 : « Nos premières notions sont acquises par les sensations ; on ne doit pas ajouter foi aux notions innées. » Dans son principal ouvrage, intitulé : *Nouvelles bases de la Géométrie* (1835), Lobatchevsky se prononça encore plus nettement, relativement à l'origine des notions géométriques :

« Dans la nature, nous ne concevons que le mouvement, sans lequel les impressions des sens sont impossibles. Toutes les autres notions, par exemple les notions géométriques, étant empruntées aux propriétés du mouvement, sont acquises par notre esprit artificiellement, et par conséquent l'espace n'existe pas séparément. »

Les recherches des géomètres contemporains sont le dévelop-

<sup>(1)</sup> *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 349-350.

<sup>(2)</sup> On connaît depuis longtemps sa lettre à Bessel (9 avril 1830), où il exprime son opinion concernant « notre connaissance de la Géométrie, privée de conviction en sa nécessité et par conséquent en sa vérité, connaissance, que nous avons de la science des quantités. Nous devons avouer que si le nombre est le produit de notre esprit, l'espace est réel en dehors de nous et nous ne pouvons lui donner des lois *a priori* ». On a aussi retrouvé sa lettre à Olbers (28 avril 1817), où il dit à peu près la même chose. « Je me persuade de plus en plus, que la nécessité de notre Géométrie ne peut être démontrée, du moins par l'esprit d'un homme et à l'esprit d'un homme : peut-être dans la vie future comprendrons-nous ce qu'il nous est impossible de comprendre maintenant, la nature de l'espace. Jusque-là nous devons comparer la Géométrie à la Mécanique et non à l'Arithmétique, qui est fondée sur des combinaisons *a priori* ».



pement de cette ingénieuse idée de Lobatchevsky concernant les notions géométriques et leur entière dépendance des propriétés du mouvement. Ueberveg fut le premier, après Lobatchevsky, qui traita cette question, indépendamment d'ailleurs de ce dernier. Dans son traité de 1851 : *L'exposé scientifique des bases de la Géométrie* <sup>(1)</sup>, il se propose de fonder uniquement la Géométrie, ainsi que toute science naturelle, sur des bases expérimentales ; et comme telles il considère : 1° la mobilité libre des corps solides, 2° et 3° la possibilité du mouvement des corps matériels dans le cas d'un ou de deux points fixes, et 4° l'impossibilité du mouvement dans le cas de trois points fixes. Les recherches sur l'optique physiologique ont amené Helmholtz aux mêmes conclusions ; mais ses investigations mathématiques sur le même sujet lui ont permis de surpasser Ueberveg <sup>(2)</sup>.

Helmholtz a démontré que plusieurs Géométries peuvent exister, avec les mêmes faits empiriques pris pour bases, tandis que Ueberveg, ayant introduit la notion de la direction et s'appuyant sur le théorème que la droite définie comme axe de rotation a une direction constante, aboutit à la Géométrie d'Euclide. Le célèbre mathématicien Sophus Lie, dont tous les savants déplorent la mort récente, compléta les recherches mathématiques de Helmholtz par l'application de la théorie, dont il est l'inventeur, des groupes de transformations ; l'importance de la théorie des groupes de mouvements pour la Géométrie est expliquée dans le travail de M. Poincaré : *On the foundations of geometry* <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> *Die principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt* (Archiv für Philologie und Pädagogik). La traduction française se trouve dans l'appendice du livre de Delbœuf : « *Prolegomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats.* » Liège, 1860.

<sup>(2)</sup> Pour apprécier les idées d'Ueberveg sur la Géométrie, il est important de connaître ses ouvrages. « *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren* » et « *Zur Theorie der Richtung des Sehens* » (Zeit. für rat. Medicin-Henle und Pfeuffer, 1858, Bd 5, S. 268-282) et sa critique des œuvres de Delbœuf, critique imprimée dans la *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, herausg. von Fichten, Ulrici Bd 37. Halle, 1860, S. 148-167.

<sup>(3)</sup> *Monist.* October 1898. V. aussi « *L'Espace et la Géométrie* » (Revue de métaphysique et de morale, 1895, novembre). Selon M. Poincaré, ce que nous appelons la géométrie n'est que l'étude d'une classe particulière de phénomènes que nous appelons déplacements et qui forment « un groupe. »

## III

Après avoir établi cette distinction entre le caractère philosophique de la Mathématique pure et abstraite et celui de la Mathématique concrète (Géométrie et Mécanique) Comte développe en détail ses idées sur la relation qui existe entre les deux branches de cette science. Il commence l'exposé de ses idées par une définition générale de toutes les mathématiques : « Nous sommes donc parvenus maintenant à définir avec exactitude la science mathématique, en lui assignant pour but la mesure indirecte des grandeurs et en disant qu'on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres d'après les relations précises qui existent entre elles. <sup>(1)</sup> »

Étant obligé d'examiner dans chaque phénomène plusieurs quantités liées dans leurs changements : « il en résulte l'étendue naturellement indéfinie et même la rigoureuse universalité logique de la science mathématique. » La définition que Comte donne des mathématiques le persuade en même temps que ce n'est qu'en les étudiant que nous pourrions acquérir les véritables notions de la nature de la science : « Toute science consiste dans la coordination des faits ; si les diverses observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait pas de science. On peut même dire généralement, que la science est essentiellement destinée à dispenser, autant que le comportent les divers phénomènes, de toute observation directe, en permettant de déduire, du plus petit nombre possible de données immédiates, le plus grand nombre possible de résultats. »

Ces particularités caractéristiques d'une science sont fortement prononcées dans les mathématiques. C'est pour cela que : « toute éducation scientifique qui ne commence point par une telle étude pèche nécessairement dans sa base. C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est qu'une science. C'est là uniquement qu'on doit chercher à connaître avec précision la méthode générale que l'esprit humain emploie constamment

---

(1) *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 129.

dans toutes ses recherches positives, parce que nulle part ailleurs les questions ne sont résolues d'une manière aussi complète, et les déductions prolongées aussi loin avec une sévérité rigoureuse. » C'est en mathématiques que notre esprit, selon Comte, a prouvé le plus sa force.

Le but des recherches mathématiques étant toujours la détermination de quantités inconnues à l'aide des relations qui existent entre elles et d'autres quantités données, chaque recherche doit comprendre deux parties : 1° la définition des relations qui existent entre les quantités qui varient ensemble dans le cas donné ; et 2° le calcul des quantités inconnues à l'aide des relations données. La première partie (concrète) de chaque recherche mathématique dépend du phénomène considéré ; et la solution de la question demandée doit être nécessairement fondée sur la considération du monde extérieur, et ne peut jamais être remplacée par une série d'opérations intellectuelles. Le but de cette partie concrète est de remplacer les relations entre les quantités (fonctions concrètes) par les équations entre les nombres, où ne peuvent entrer que des fonctions abstraites, examinées dans les mathématiques pures. C'est par ce remplacement qu'a lieu le passage du concret à l'abstrait, et c'est sur l'importance de ce passage que Comte s'arrête avec détail. L'idée mère de ce passage, il la voit dans la Géométrie analytique ; et c'est par là qu'on peut expliquer le respect qu'il éprouvait pour Descartes et la révolution philosophique qu'il opéra dans la Géométrie. Le seul traité de Comte concernant les mathématiques, *Traité élémentaire de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions* <sup>(1)</sup>, avait pour but d'expliquer l'avantage des méthodes générales sur les méthodes spéciales applicables seulement à de certaines courbes, traitées par les géomètres de l'antiquité. Le traité de Comte se distingue avantageusement des autres manuels de Géométrie analytique par l'attention avec laquelle il étudie les théories géométriques générales pour toutes les courbes : la théorie du nombre de points nécessaire pour la définition des courbes, celle des tangentes et des asymptotes, celle des diamètres, celle des courbes semblables,

---

(1) Paris, 1843. Une nouvelle édition a été publiée par les positivistes du Brésil en 1894.

des quadratures, etc. L'importance du remplacement des relations concrètes entre les quantités liées dans leurs variations, par les relations abstraites entre les nombres, dépend surtout de ce que les recherches des mathématiques abstraites sont générales et peuvent être également appliquées aux différents cas.

Les mêmes relations peuvent se rencontrer dans l'étude de phénomènes différents ; et dans ce cas la théorie de ces phénomènes présente aux mathématiciens la même question : « La même loi, qui règne entre l'espace et le temps, quand on examine la chute verticale d'un corps dans le vide, se retrouve pour d'autres phénomènes qui n'offrent aucune analogie avec le premier d'entre eux, car elle exprime aussi la relation entre l'aire d'un corps sphérique et la longueur de son diamètre ; elle détermine également le décroissement de l'intensité de la lumière ou de la chaleur à raison de la distance des objets éclairés ou échauffés, etc. » <sup>(1)</sup>

L'Analyse mathématique permet d'établir une coordination parfaite dans l'étude des phénomènes. Car les conceptions ayant été généralisées et simplifiées le plus possible, à tel point qu'une seule question analytique, résolue abstraitement, renferme la solution implicite d'une foule de questions physiques diverses, il doit nécessairement en résulter pour l'esprit humain une plus grande facilité à apercevoir des relations entre des phénomènes qui semblaient d'abord entièrement isolés les uns des autres. C'est ainsi qu'en examinant la marche de notre intelligence dans la solution des questions importantes de la Géométrie et de la Mécanique, nous voyons surgir naturellement, par l'intermédiaire de l'Analyse, les rapprochements les plus fréquents et les plus inattendus entre des problèmes qui n'offraient primitivement aucune liaison apparente. » <sup>(2)</sup>

Ces raisonnements de Comte sur l'analogie des formules mathématiques dans les divers phénomènes sont une prévision ingénieuse du chemin que la Physique mathématique suivit au XIX<sup>e</sup> siècle.

Cauchy, Lamé, Chasles, Thomson (Lord Kelwin), Helmholtz, Kirchhoff et d'autres ont recouru aux analogies mathématiques dans leurs recherches sur les lois d'attraction, sur le calorique, etc. Mais c'est surtout depuis les recherches de Maxwell que l'étude

---

<sup>(1)</sup> *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 137. — <sup>(2)</sup> *Ibid.*, t. I, p. 146.

des analogies qui existent entre les différentes parties de la Physique est devenue de toute importance pour l'étude des phénomènes physiques; elle a eu de l'influence sur la nature des théories physiques et l'importance des formules mathématiques. Nous avons rompu avec la mythologie mécanique et, comme le dit Mach : les formules mathématiques ne sont pas considérées comme des lois qui gouvernent le monde, mais comme les descriptions les plus concises des phénomènes, par conséquent les plus économiques.

Le côté économique de la pensée scientifique, bien prononcé dans les Mathématiques, est parfaitement expliqué par Mach <sup>(1)</sup>. Mais quand on lit ses raisonnements, on se rappelle involontairement que Comte aussi, en examinant la Géométrie de Descartes, voyait son importance dans le fait d'épargne cérébrale que nous venons de signaler : « instituant une meilleure économie de nos forces spéculatives, » dit-il textuellement (*Traité élém. de Géométrie analytique*, p. 3.)

#### IV

Une fois que les lois mathématiques des phénomènes ont été exprimées à l'aide des fonctions analytiques, le reste est simplement l'affaire des mathématiques pures ou abstraites, qui comprennent les opérations les plus ordinaires des nombres comme les combinaisons les plus compliquées de l'Analyse transcendante, Les équations que nous donne l'étude du phénomène dans la partie concrète des recherches mathématiques deviennent le point de départ des mathématiques pures. Ainsi, d'après l'ordre logique, la Mathématique abstraite suit la concrète, de même que dans le développement historique des mathématiques, les progrès de la partie concrète des mathématiques ont assuré ceux de la partie abstraite. En développant et démontrant cette dépendance logique et historique, Comte voyait clairement, du même coup, que les mathématiques abstraites forment par elles-mêmes une branche du savoir pleinement indépendante, et que leur étude doit pré-

(1) MACH. *Prinzipien der Wärmelehre*, 1896, p. 396. V. aussi le beau discours de Zurich de M. Poincaré.

céder l'étude philosophique de la Géométrie et de la Mécanique. Il insiste sur le fait que les mathématiques pures peuvent et doivent être exposées en un système unique et discontinu, indépendant de toutes combinaisons géométriques ou mécaniques. Il est certain que les méthodes supérieures de l'Analyse infinitésimale ont été inventées pour la solution des questions géométriques et mécaniques, et, comme conséquence, elles ont réfléchi l'influence des combinaisons géométriques et mécaniques. Le calcul des fluxions de Newton est fondé sur l'examen d'une courbe décrite par un point matériel qui se meut, d'après la loi de l'accélération. Les combinaisons géométriques ont de l'influence sur les méthodes des infinitésimaux de Leibniz. L'illustre Lagrange a fait le premier la tentative d'exposer l'Analyse à un autre point de vue. Dans sa : « Théorie des fonctions analytiques » et ses « Leçons sur le calcul des fonctions » il détermine la dérivée comme le coefficient du premier degré de l'accroissement  $h$  dans le développement de la fonction  $f(x+h)$ , et de cette manière il fonde toute l'Analyse sur la théorie du développement des fonctions en séries. En examinant dans la sixième leçon l'Analyse des infinitésimaux à tous les points de vue, Comte prend le parti de Lagrange et considère son point de vue comme « le plus rationnel et le plus philosophique ». « Écartant avec soin toute considération hétérogène, Lagrange a réduit l'Analyse transcendante à son véritable caractère propre, celui d'offrir une classe très étendue de transformations analytiques... En même temps, cette Analyse est nécessairement présentée par là comme une simple extension de l'Analyse ordinaire ; elle n'a plus été qu'une Algèbre supérieure. Toutes les diverses parties, jusqu'alors si incohérentes, de la Mathématique abstraite, ont pu être conçues, dès ce moment, comme formant un système unique. » <sup>(1)</sup>

Pendant les soixante-dix années qui se sont écoulées depuis que Comte a écrit ces lignes, la tendance dominante chez les mathématiciens a été de donner de l'unité aux mathématiques pures et d'en bannir toutes les combinaisons prises dans d'autres sciences, surtout en Géométrie. Un mathématicien qui se rangea aux idées de Lagrange, en voulant fonder la théorie des fonctions

---

(1) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 268.

sur la théorie des séries de puissances, fut Weierstrass. Il manque en effet à la théorie de Lagrange l'ensemble et la précision ; car il examinait seulement les séries développées d'après les puissances de la variable réelle, et ne faisait aucune attention aux lois de convergence. Pour Weierstrass, la base de la théorie des fonctions est aussi une série de puissances, mais une série développée d'après les puissances de la variable complexe, et convergente dans un certain « cercle de convergence ».

Le principe de « la continuation analytique » nous permet d'observer la marche d'une fonction en dehors du cercle primordial de convergence ; et de cette façon toute la théorie des fonctions devient le résultat de la théorie des séries ; parcellément à cette dernière, elle est fondée sur des bases solides et purement arithmétiques <sup>(1)</sup>. La théorie des nombres incommensurables est fondée par Weierstrass et d'autres mathématiciens sur de semblables bases arithmétiques, indépendantes de l'évidence des combinaisons géométriques. Le plus important à ce point de vue fut Kronecker, qui voulait réduire toutes les Mathématiques aux opérations des nombres entiers. C'est dans l'arithmétisation des mathématiques et dans la tendance à rendre toutes les démonstrations des théorèmes de l'Analyse exclusivement arithmétiques, que nous trouvons les particularités caractéristiques des mathématiques contemporaines <sup>(2)</sup>. Les vérités, qui semblaient auparavant être démontrées d'après l'évidence géométrique, comme par exemple l'existence d'une dérivée de toute fonction continue, sont reconnues aujourd'hui comme admettant des exceptions. Je ne puis m'empêcher de rappeler, à ce sujet, que Lobatchevsky a devancé ses contemporains dans la solution de la question, relativement à la différentiation et à la discontinuité.

En se plaçant au point de vue de Lagrange et en ne voyant dans l'Analyse transcendante que la suite de l'Algèbre ordinaire, Comte présente le système de la pure Mathématique de la manière suivante. D'un côté les équations entre les nombres exprimés à l'aide d'éléments analytiques (fonctions abstraites),

<sup>(1)</sup> V. H. POINCARÉ : *L'œuvre mathématique de Weierstrass* (Acta mathem. XXII, 1898) et notre article : « Weierstrass et la Mathématique contemporaine ». (*Bull. de la Soc. physico-mathématique de Kasau*. Série I, V. 4, 1886.)

<sup>(2)</sup> F. KLEIN. *Arithmétisation des mathématiques* (Nouv. Ann. de Mathém., 1897.)

équations qui proviennent de la solution de chaque question concrète, doivent être transformées pour démontrer plus précisément de quelle manière les quantités inconnues sont composées à l'aide des quantités connues ; de l'autre, après que les transformations ont conduit aux formules les plus simples et les plus élégantes, il est nécessaire de trouver des nombres inconnus. Conformément à ces deux problèmes, l'Analyse se divise en deux parties : l'Algèbre ou le Calcul des fonctions et l'Arithmétique ou le Calcul des quantités (nombres). Comte rapporte à l'Arithmétique beaucoup de questions qu'on ne lui attribue pas d'ordinaire, comme la construction des Tables logarithmiques et trigonométriques, la résolution numérique des équations, l'interpolation, l'intégration approximative, etc.

L'Algèbre ou le Calcul des fonctions se divise à son tour en deux parties : le Calcul des fonctions directes (Analyse ordinaire ou Algèbre proprement dite) et Calcul des fonctions indirectes (Analyse transcendante). La première partie a pour but la transformation immédiate et la résolution des équations formées entre les quantités examinées ; la seconde s'occupe des quantités auxiliaires ordinairement liées à celles qu'on examine dans la question et qu'on introduit pour faciliter l'opération. Telles sont les différentielles, dérivées, ou fluxions, selon que nous prenons tel ou tel des trois points de vue sur l'Analyse transcendante. Enfin l'Analyse transcendante se divise en deux parties, selon qu'elle a pour but la déduction des équations entre les quantités corrélatives dérivantes (Calcul différentiel, Calcul des fonctions dérivées, des fluxions) ou le problème inverse (Calcul intégral, Calcul des fonctions dérivantes, Calcul des fluentes). La septième leçon du cours de Comte est consacrée à l'explication des relations entre ces deux problèmes ; la fin de son exposé du système des mathématiques pures est entièrement consacrée au Calcul des variations (huitième leçon) et au calcul des différences finies (neuvième leçon).

J'ai ainsi terminé l'exposé des idées d'Auguste Comte sur la Philosophie des mathématiques, et je considère que mon but est atteint, si cet exposé persuade le lecteur, que les idées de Comte sur la relation entre les mathématiques pures ou abstraites et les mathématiques appliquées ou concrètes, sur la Géométrie considé-



rée comme science naturelle, et sa conviction qu'il faut atteindre l'unité parfaite de l'Analyse, se confirment et s'expliquent par tous les progrès des mathématiques pendant les soixante-dix années écoulées depuis l'apparition du premier volume de la Philosophie positive.

Les progrès de la Physique mathématique ont mis beaucoup de branches des mathématiques concrètes au même rang que la Thermologie que Comte a si chaudement accueillie; et Maxwell, auquel nous devons la création de la théorie électro-magnétique de la lumière, s'exprime dans les termes suivants, conformes aux idées de Comte : « toutes les applications des mathématiques à la Philosophie naturelle sont basées sur les relations entre les lois des quantités physiques et les lois des nombres, de même que l'aspiration fondamentale des sciences précises est la réduction des problèmes de la nature à la détermination des quantités, à l'aide des opérations sur les nombres. » <sup>(1)</sup>

Le mouvement scientifique et philosophique en Géométrie, étroitement lié au nom (inoubliable pour nous) de Lobatchevsky, donne l'explication des relations qui existent entre deux sciences naturelles, la Géométrie et la Mécanique, et la solution du problème discuté par Comte, à savoir : séparer dans les notions fondamentales de ces sciences « le physique et le logique ». <sup>(2)</sup> L'arithmétisation des mathématiques a pour but de créer l'unité parfaite des mathématiques pures.

En étudiant les œuvres d'Auguste Comte, on comprend pourquoi son nom occupera toujours une place importante dans l'histoire de la Philosophie des mathématiques, bien qu'il n'ait jamais eu les succès brillants que Sturm, par exemple, a remportés dans l'Analyse mathématique. En tout cas, le mathématicien qui lira le premier volume de la Philosophie positive aura beaucoup à gagner au contact des idées qui y sont exprimées; il gagnera plus encore en s'assimilant cet esprit d'admiration pour la méthode mathématique, qui caractérise le livre entier de Comte. D'après ce dernier, cette méthode est la manifestation la plus brillante de l'« esprit positif. »

A. VASSILIEF (Kazan).

<sup>(1)</sup> *On Faraday's lines of force. Scientific papers*, Cambr., 1890; vol. I, p. 156.

<sup>(2)</sup> *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 541.