III LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

formule qui renferme avec la similitude, la Trigonométrie plane quand on lui adjoint le résultat trouvé déjà tout à l'heure.

Enfin, pour terminer ce paragraphe, j'indiquerai comment la seule Géométrie qualitative fournit la Trigonométrie sphérique : il suffit pour cela de décomposer un même vecteur issu de O suivant deux systèmes d'axes OX, OY, OZ ; OX', OY', OZ' ayant en commun les axes OX et OX' et de comparer les deux modes *équivalents* de décomposition.

III

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Si l'on considère, et tel est mon avis, la notion d'intégrale définie comme plus simple que la notion des séries entières, on pourra ramener la recherche de la fonction g à celle de la fonction F.

La fonction F étant continue est intégrale, posons alors :

$$\chi(x) = \int_0^x \mathrm{F}(u)\, du$$

envisageons ensuite deux vecteurs P et R perpendiculaires *de même sens* aux extrémités d'une droite AB de longueur c, supposons d'ailleurs que la droite AB soit considérée de longueur assez réduite pour que l'on ait, pour $0 < x \leqq \mathrm{AB}$:

$$\mathrm{F}(x) > 0$$

on voit alors aisément que l'on peut déterminer un vecteur ϖ et deux longueurs a et b de manière que l'on ait :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= 2\varpi\chi(b) \\ \mathrm{Q} &= 2\varpi\chi(a) \\ c &= a + b. \end{aligned}$$

la méthode donnée par Archimède pour la composition des forces parallèles euclidiennes nous montrera ici que :

1° Sur AB le point d'application C de la résultante R des forces P et R sera aux distances respectives a et b des extrémités A et B.

2° Que la résultante R perpendiculaire à AB a pour intensité

$$R = 2\varpi\chi\,(c)$$

Il résulte de la méthode d'Archimède comme d'ailleurs de la définition de $\chi\,(x)$ que l'on a d'abord :

$$\chi\,(x+y) = \chi\,(x-y) + 2\chi\,(y)\,F\,(x)$$

et pareillement

$$\chi\,(x+y) = \chi\,(y-x) + 2\chi\,(x)\,F\,(y)$$

et par conséquent encore :

$$(5) \qquad \chi\,(x+y) = \chi\,(x)\,F\,(y) + \chi\,(y)\,F\,(x)$$

la fonction $\chi\,(x)$ admettant par définition une dérivée, il en sera donc de même de la fonction F ; et alors en dérivant par rapport à x l'équation précédente il vient :

$$F\,(x+y) = F\,(x)\,F\,(y) + \chi\,(y)\,F'\,(x)$$

en dérivant la même équation par rapport à y on aurait :

$$F\,(x+y) = F\,(x)\,F\,(y) + \chi\,(x)\,F'\,(y) = 0$$

d'où, en comparant les deux derniers résultats :

$$\chi\,(x)\,F'\,(y) = \chi\,(y)\,F'\,(x) = 0$$

ce qui exige que l'on ait en désignant par μ une constante

$$F'\,(x) = \mu\chi\,(x)$$

en sorte que l'on aura aussi

$$(6) \qquad F\,(x+y) = F\,(x)\,F\,(y) + \mu\chi\,(x)\,\chi\,(y)$$

La formule (5) permettra d'écrire la valeur précédente de R

$$R = 2\varpi\chi\,(a+b) = QF\,(b) + PF\,(a).$$

si elle n'est pas nulle la constante μ peut d'ailleurs être rendue égale à $+1$ ou à -1 par un simple changement de variable.

L'emploi des postulats cinématiques donnés dans le précédent paragraphe conduira dans le cas de $\mu > 0$ aux propriétés métriques de l'espace de Lobatchewsky et dans le cas de $\mu < 0$ aux propriétés métriques de l'espace de Riemann.

Désignons par S et C les fonctions χ et F réduites à l'hypothèse de $\mu^2 = 1$.

Nous pourrons résumer les propriétés des fonctions g et h d'une part et S et C d'autre part dans les deux tableaux ci-contre

$h(x+y) = h(x)\,g(y) + h(y)\,g(x)$	$S(x+y) = S(x)\,C(y) + S(y)\,C(x)$
$g(x+y) = g(x)\,g(y) - h(x)\,h(y)$	$C(x+y) = C(x)\,C(y) + \varepsilon S(x)\,S(y)$
$h(0) = 0$	$S(0) = 0 \qquad \varepsilon = \pm 1$
$h(1^{\text{droit}}) = 1$	$C(0) = 1$
$g[x+y] + g(x-y) = 2g(x)\,g(y)$	$C(x+y) + C[(x-y)] = 2C(x)\,C(y)$
	$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dS}{dx} = C(x) \\ \dfrac{dC}{dx} = \varepsilon S(x)\end{array}\right\}$ d'où on conclut $C^2(x) - \varepsilon S^2(x) = 1$.

Le tableau de gauche sera d'ailleurs ramené comme on l'a vu au tableau de droite par la considération de l'intégrale $\int_0^x g(x)\,dx$.

Les fonctions g, h, C, S dont les deux dernières coïncident avec les deux premières si $\varepsilon = -1$, sont donc ainsi déterminées par le seul tableau de droite qui comprend alors le premier *à cela près que la correspondance entre l'unité concrète et l'unité analytique d'angle n'est pas encore précise.*

Pour préciser cette correspondance nous chercherons une solution de l'équation

$$(7) \qquad F[(x+y)] + F(x-y) = 2F(x)\,F(y) \text{ avec la condition } F(0) = 1$$

sous forme de série entière ; nous trouverons aisément, k désignant une constante

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n\ \infty} (k_n)\,\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$$

forme qui, par le changement de variable,

$$x \,\Big|\, \frac{x}{\sqrt{\operatorname{mod} k}}$$

se ramènera à l'une ou l'autre des deux formes, convergentes pour toute valeur de x

$$F_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$F_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

la solution la plus générale de l'équation (7) sera alors de l'une ou l'autre des deux formes :

$$F_1(mx), \qquad F_2(mx), \qquad m = \text{constante}$$

bien entendu en laissant de côté la solution déjà étudiée $F(x) = 1$. En appelant $\frac{\pi}{2}$ la plus petite racine de l'équation $F_1(x) = 0$ nous aurons exprimé l'angle droit avec l'unité analytique des angles.

Nous arrivons donc ainsi à réaliser dans un enseignement moyen la fusion de la Géométrie métrique générale, de la Statique et de la Trigonométrie plane.

Ces trois chapitres si distincts en apparence et si séparés par la classification usuelle, ne sont, comme on vient de le voir que les trois aspects d'une seule et même notion, la notion du groupe d'équivalence ; et ce groupe a pour symbole analytique la fonction exponentielle e^x.

IV

Mentionnons enfin, sans le développer, le troisième livre de la Géométrie naturelle : la mesure des étendues.

Quel que soit d'ailleurs le point de vue euclidien ou général, d'où l'on se place, il est nécessaire et facile de donner des trois étendues, *trois définitions présentant dans ses termes le caractère invariant*. Par exemple la définition usuelle des aires courbes doit être rejetée.

V

Pour résumer cet article en quelques lignes, il me suffira de dire que la statique de Poinsot domine sa traduction euclidienne, elle dérive du théorème d'Euler sur les rotations finies, et rattache celui-ci, dans une représentation *cinématique*, à la théorie analytique des fonctions circulaires créée par Euler. *Consciemment ou non, la Géométrie a été faite par la Cinématique.*

Euler et Poinsot : tels sont les noms qui résument le mieux la Géométrie naturelle. N'est-il pas temps que celle-ci soit enseignée ?

Jules ANDRADE (Montpellier).