

Evariste Galois: 1811 - 1832

Autor(en): **Kollros, Louis**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **6/7 (1949)**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4708>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Evariste Galois

1811 — 1832

Dans toute l'histoire des sciences, la courte vie d'Evariste Galois est certainement la plus étrange, la plus tragique et l'une des plus fécondes pour les progrès des mathématiques modernes.

Un jeune homme, considéré par ses contemporains comme un agitateur politique, est tué en duel à 20 ans sept mois. Pendant la nuit avant sa mort, il écrit fiévreusement son testament scientifique. Quelques années plus tard, on reconnaît en lui un mathématicien de génie, un des esprits les plus profonds du 19^e siècle.

Evariste Galois est né à Bourg-la-Reine, près de Paris, le 25 octobre 1811. Son père, *Nicolas-Gabriel Galois*, avait alors 36 ans; il dirigeait un pensionnat fondé avant la Révolution par le grand-père d'Evariste. Chef du parti libéral de son village, il avait vu avec joie la chute de Louis XVIII en avril 1814. Pendant les Cent-Jours, on lui confia la mairie. Ce poste devait lui être fatal. Il le garda après Waterloo. En sa qualité de maire, il dut (sans doute à contre cœur) jurer fidélité au Roi. Il était républicain et les royalistes étaient nombreux dans son village. Il avait épousé la fille d'un savant jurisconsulte, *Adélaïde-Marie Demante*, qui habitait presque en face de la maison Galois. Grâce à une solide éducation classique et religieuse, elle lisait couramment le latin, comparant aux textes bibliques ceux de Sénèque et de Cicéron.

Jusqu'à l'âge de 12 ans, Evariste n'eut pas d'autre éducatrice que sa mère; elle est morte en 1872, âgée de 84 ans; jusqu'à la fin elle a gardé son intelligence et sa bonté. L'enfance d'Evariste a été heureuse; aimable et affectueux, il répandait la joie autour de lui; il composait des dialogues et des couplets pour les fêtes de famille. A 10 ans, il aurait pu avoir une bourse au collège de Reims, mais sa maman préféra le garder près d'elle.

En 1823, Galois quitte la maison paternelle pour entrer comme interne en Quatrième au collège *Louis-le-Grand*, à Paris. Bon élève pendant les deux premières années, il obtient le premier prix de vers latins et trois accessits à la fin de la Troisième. C'est en Seconde que paraissent les premières marques de lassitude pour le travail scolaire. Son humeur change; il devient triste et singulier; on le juge original et bizarre; on lui trouve quelque chose de caché dans le caractère. Le proviseur du collège pense qu'il n'a pas encore le jugement assez mûr pour profiter des leçons; il l'oblige à redoubler la Seconde, malgré la résistance du père. Evariste ne peut se résoudre à refaire des devoirs qui l'ennuient. Il profite de son retour forcé en Seconde pour entrer en même temps dans la classe de Mathématiques préparatoires. C'est là qu'il a la révélation de ses facultés extraordinaires. Il lit comme un roman la Géométrie de *Legendre*; il la sait dès qu'il a terminé sa lecture. Les livres élémentaires d'Algèbre ne le satisfont pas. C'est dans les ouvrages classiques de *Lagrange* qu'il fait son éducation scientifique. Il se sent entraîné vers la recherche mathématique. On lui reproche une ambition affectée et un immense orgueil. Tandis qu'il s'enfonce toujours davantage dans ses méditations, un de ses maîtres trouve «qu'il s'occupe toujours de ce qu'il ne faut pas faire»; un autre pense qu'il compromet sa carrière en travaillant sans méthode. Galois tient à se préparer

tout seul aux examens d'admission à l'Ecole Polytechnique. Il est refusé. Cet échec est pour lui un premier déni de justice. Mais il ne perd pas courage; il se présentera une seconde fois. Il est loin de se douter des déceptions qui l'attendent. Tout l'attire vers cette Ecole Polytechnique qui est à la fois une fille de la Révolution, restée fidèle à ses origines, et la première école de mathématiques supérieures.

En 1828, Galois entre directement dans la classe de Mathématiques spéciales de Louis-le-Grand qu'il n'aurait dû aborder, selon l'usage, qu'après une année de Mathématiques élémentaires. Il trouve enfin un maître admirable, le Professeur *Richard**, qui sait l'apprécier et lui reconnaît une supériorité marquée sur tous ses camarades. Il commentait en classe les solutions originales trouvées par son élève. Il gardait tous ses devoirs qu'il aimait à montrer. Il les a légués à *Charles Hermite* (1822-1901). Après la mort d'Hermite, *Emile Picard* (1856-1941) les a donnés à l'Académie des Sciences; ils sont maintenant à la Bibliothèque de l'Institut.

Pendant l'année même de son échec, Galois rédige sa *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques* [(Euvres (1)**, p. 1 à 8]; c'est un beau travail qui, cependant, ne permet pas encore de deviner en l'auteur un futur génie. Ce premier Mémoire a été publié à Nîmes, dans les Annales de mathématiques (tome XIX, mars 1829), premier journal français consacré exclusivement aux mathématiques et dirigé par Gergonne (1771-1859).

Euler avait déjà observé qu'en développant la racine carrée d'un nombre entier en fraction continue, on a une période. Généralisant ce résultat, *Lagrange* a trouvé que tout nombre développable en fraction continue périodique est une irrationnelle quadratique, et réciproquement, toute racine incommensurable d'une équation du second degré à coefficients entiers se développe en fraction continue périodique. Si la période ne commence pas tout de suite, on peut transformer l'équation du second degré en une autre dont une des racines est immédiatement périodique.

Galois démontre très simplement le théorème suivant:

Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans l'ordre inverse.

Par exemple, une racine de l'équation: $3x^2 - 10x - 4 = 0$ peut être représentée par la fraction continue:

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}} \quad \text{dont la période est } (3, 1, 2; \dots);$$

* Quinze ans plus tard, Richard sera le maître de Charles Hermite.

** Les chiffres entre parenthèses se rapportent à la Bibliographie, p. 24.

l'autre racine est égale à

$$\frac{-1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \dots}}} ; \text{ elle a la période } (2, 1, 3; \dots).$$

Il semble qu'à dix-sept ans Galois avait déjà obtenu des résultats de la plus haute importance sur la *théorie des équations algébriques*.

Depuis l'antiquité, on a su résoudre les équations des deux premiers degrés. Le mathématicien italien *Cardan*, né à Pavie en 1501, mort à Rome en 1576, a trouvé la formule bien connue qui exprime les racines de l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0.$$

en fonction des coefficients. Son élève, *Luigi Ferrari*, né et mort à Bologne (1522-1565), a résolu l'équation du quatrième degré. Dès lors, malgré les essais de nombreux chercheurs, le problème de la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs à quatre n'a pas fait de progrès pendant plus de deux siècles.

C'est grâce à l'ingéniosité de *Lagrange*, *Gauss*, *Abel* et *Galois* que la base définitive de la théorie des équations a été trouvée. Leurs idées profondes, celles de *Galois* en particulier, ont eu des prolongements extraordinaires dans bien d'autres directions. Il n'est pas inutile, je pense, de dire d'abord quelques mots de ses trois précurseurs.

L'illustre *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813), un des plus grands savants du 18^e siècle, est né à Turin. Il descendait d'une ancienne famille de Touraine alliée à celle de Descartes. Son père était riche, mais il s'est ruiné dans des entreprises hasardeuses. Lagrange envisageait ce malheur comme la première cause de tout ce qui lui était ensuite arrivé de plus heureux. Nommé à 18 ans professeur à l'Ecole Royale d'Artillerie de sa ville natale, il a fondé avec ses élèves l'Académie de Turin. En 1766, il fit le voyage à Paris; il tenait à voir d'Alembert, Condorcet et l'abbé Nollet, physicien, avec lesquels il entretenait une correspondance active. Son séjour à Paris fut de courte durée, car Frédéric II l'appela pour remplacer *Euler* (1707-1783) à l'Académie de Berlin. Le 6 novembre 1766, le nouveau directeur de la classe physico-mathématique était solennellement reçu par les membres de cette Société savante. Il conserva ses fonctions jusqu'en 1787. A la mort de Frédéric, il quitta Berlin. Louis XVI l'appela à Paris. Plus heureux que Condorcet, Bailly, Lavoisier, l'orage révolutionnaire l'épargna. Son enseignement à l'Ecole Polytechnique couronna sa carrière.

Pendant les vingt ans passés à Berlin, Lagrange publia d'importants travaux, entre autres le beau mémoire qui a inspiré Abel et Galois: «*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*» (Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1770 et 71; Œuvres, t. III, p. 205 à 421). Il examine d'abord les différentes méthodes que l'on a trouvées pour les équations des quatre premiers degrés; il les soumet à une analyse

approfondie, trouve le fondement commun sur lequel elles reposent et les ramène à une méthode générale basée sur la théorie des substitutions. Il fait voir pourquoi sa méthode réussit pour le troisième et le quatrième degré, mais est en défaut pour les degrés ultérieurs. «Cet examen», dit-il, «aura un double avantage: d'un côté, il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues des degrés 3 et 4; de l'autre, il sera utile à ceux qui voudront s'occuper des degrés supérieurs».

L'impuissance de la méthode de Lagrange pour les équations générales des degrés supérieurs à quatre faisait croire à l'impossibilité de les résoudre par radicaux.

En 1821, avant de quitter le gymnase, le jeune mathématicien norvégien *Niels Henrik Abel* (1802-1829) crut un moment avoir trouvé la résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré. Mais quand on lui demanda une déduction plus détaillée et l'application à un exemple numérique, il découvrit lui-même l'erreur qu'il avait commise. A 22 ans, il publia la démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique de l'équation générale du cinquième degré. (Œuvres complètes, t. I, p. 66 à 94).

En 1799, le géomètre italien *Paolo Ruffini* (1765-1822) avait déjà trouvé ce théorème en se basant sur les idées de Lagrange. Ses Œuvres mathématiques n'ont été publiées qu'en 1915.

En 1828, *Abel* rédigea un travail très important intitulé: «Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement» (Œuvres t. I, p. 478). Sur la proposition de *Kronecker*, on les appelle aujourd'hui: *équations abéliennes*.

Il arrive souvent que des mathématiciens éminents fassent leurs plus belles découvertes pendant leur jeunesse. *Abel* et *Galois* sont morts trop vite. Ils ont dû laisser à leurs successeurs le soin d'approfondir leurs théories et d'en tirer les conséquences.

Un autre mathématicien génial, inspirateur d'*Abel* et de *Galois*, a eu des idées profondes avant sa vingtième année, c'est *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) que l'on a appelé «Princeps mathematicorum». Comme Lagrange, il a eu le bonheur de pouvoir développer ses idées pendant une belle et longue vie de labeur. Il n'avait pas encore 19 ans quand il notait dans son «Tagebuch» la découverte de la construction du polygone régulier de 17 côtés (30 mars 1796); il l'a d'abord publiée à Leipzig le 1^{er} juin 1796 dans l'«Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung» et plus tard, comme corollaire d'une vaste théorie, dans ses célèbres «Disquisitiones arithmeticae» Sect. VII (1801). Il montre que les équations binômes $x^n = 1$ qui servent à partager la circonférence en parties égales sont résolubles algébriquement (ce sont les équations abéliennes les plus simples). Si le degré de l'équation est un nombre premier p , la résolution peut être effectuée à l'aide de radicaux dont l'indice est un diviseur de $(p-1)$. En particulier, l'équation du seizième degré que l'on obtient en divisant $x^{17} - 1 = 0$ par $x - 1$ peut être ramenée successivement à quatre équations du second degré. C'est pour cela qu'on peut construire avec la règle et le compas le polygone régulier de 17 côtés inscrit dans un cercle donné. Il en est de même si le nombre des côtés est $2^{2^n} + 1$ et si ce nombre est premier;

c'est le cas pour $n=0, 1, 2, 3, 4$, mais pas pour $n=5$; le nombre 4.294.967.297 est divisible par 641.

C'est en analysant le mémoire de Gauss qu'Abel a été conduit à la classe remarquable des équations qui portent son nom. Les équations de la division du cercle jouissent de deux propriétés essentielles :

- 1) toutes leurs racines sont des fonctions rationnelles de l'une d'elles,
- 2) si $x_i = f_i(x_1)$ et $x_k = f_k(x_1)$ sont deux racines quelconques exprimées au moyen de la racine x_1 , les fonctions f_i et f_k sont *échangeables*, c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$f_i f_k(x_1) = f_k f_i(x_1).$$

Abel définit inversement une équation par ces deux propriétés et démontre qu'elle est résoluble algébriquement. Son beau travail a été publié en 1829 dans le Journal de Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik; t. 4). Il porte la date du 29 mars 1828.

Lorsque *Galois* présenta ses recherches à l'Académie des Sciences de Paris le 25 mai 1829, il avait étudié les travaux de Lagrange et de Gauss, mais il ne connaissait pas ceux d'Abel. Dans les papiers inédits de Galois on a trouvé cette remarque (6) p. 24 : « Il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le *nom* d'Abel, quand j'ai présenté à l'Institut mes premières recherches sur la théorie des équations ». C'est seulement après la mort de son éminent rival (6 avril 1829) que Galois a approfondi les mémoires d'Abel et ceux de *Jacobi* (1804-1851). En revanche, il connaissait sans doute les deux travaux de *Cauchy* sur la théorie des substitutions, publiés en 1815 : l'un « Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme* », — l'autre « Sur les fonctions alternées, celles qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables » (Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier XVII, tome X, p. 1 et p. 29; ou Œuvres complètes, II^e série t. I, p. 64 à 90 et 91 à 169).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), un des plus grands mathématiciens de cette époque, était, à 27 ans, membre de l'Académie des Sciences de Paris et professeur à l'Ecole Polytechnique. C'est à lui que fut confié l'examen du mémoire du jeune collégien. Galois pensait certainement que Cauchy était, de tous les mathématiciens français, celui qui devait tout particulièrement s'intéresser à ses recherches. Mais le mémoire fut égaré et un second travail présenté huit jours plus tard (le 1^{er} juin 1829) subit le même sort. On sait que Galois y exposait ses recherches sur les équations algébriques dont le degré est un nombre premier. Ces deux ouvrages n'ont jamais été retrouvés. L'auteur les réclama en vain au secrétariat de l'Académie. Il dut se résigner à la perte de ses travaux qu'il considérait avec raison comme importants.

* *Ruffini* avait déjà trouvé que pour cinq quantités ou davantage, on ne peut pas former de fonctions qui n'aient que quatre valeurs (Mém. de la Soc. italienne, t. XII).

Deux autres désastres augmentèrent encore ses souffrances morales avant la fin de cette année d'épreuves 1829: son second échec à l'Ecole Polytechnique et le suicide de son père.

Dans sa belle étude (4) sur la vie de Galois, *Paul Dupuy* rapporte la légende qui s'est formée sur le deuxième examen d'admission à l'Ecole Polytechnique. «Quel est», dit-il, «l'examineur qui n'avait pas compris Galois? Etait-ce Binet ou Lefébure de Fourcy? Je ne sais, mais la tradition veut qu'après une discussion où l'un d'eux avait eu tort, le candidat, exaspéré, ait jeté à la figure de l'examineur le torchon à effacer la craie».

Dans son commentaire (5) sur la notice de Dupuy, *Joseph Bertrand* (1822-1900) assure que cette tradition est fausse. Ce n'était pas Binet, l'ami de Cauchy, qui avait été l'examineur, mais le professeur *Dinet*, le vieux maître de Cauchy, d'Olinde Rodrigues, de Combes, Duhamel et Elie de Beaumont. Il demanda à Galois d'exposer la théorie des logarithmes arithmétiques. Premier grief du candidat: il n'y a pas de logarithmes *arithmétiques*; pourquoi ne pas lui demander simplement la théorie des logarithmes? Il se borna à dire ce que chacun sait; à une autre question banale, il répondit sèchement, peut-être avec impertinence. Dinet lui mit une note éliminatoire et Galois vit ainsi son grand désir anéanti.

Peu de temps après cet échec, il perdit son père dans de pénibles circonstances. Une cabale politique antilibérale avait été montée contre le maire de Bourg-la-Reine qui ne put résister à cette attaque; pris par le délire de la persécution, il s'asphyxia le 2 juillet dans son appartement de Paris, tout près du collège Louis-le-Grand.

Obligé de renoncer à l'Ecole Polytechnique, désespéré, Galois voulut entrer à l'Ecole Normale; elle s'appelait alors Ecole préparatoire. Le baccalauréat qu'il subit en décembre 1829 faillit encore mal tourner pour lui. En mathématiques, l'examineur *Leroy*, prévenu sans doute par Richard, lui donna 8 sur 10: c'était suffisant pour compenser la note de physique de l'examineur *Péclet*, qui ne croyait pas à la capacité du candidat. Il fut admis et signa, le 20 février 1830, l'engagement qui le liait à l'Ecole Normale. Il ne fut pas un bon élève. Il suivait à peine les cours de ses maîtres. Il ne travaillait pas pour eux, mais pour lui.

Pendant le premier semestre de 1830, il publie trois mémoires dans le Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac: en avril, une *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*, (1) p. 11 et 12, où il indique sans démonstration quelques-unes de ses belles découvertes:

1) Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que, deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

2) Pour qu'une équation primitive* du degré m soit résoluble par radicaux, il faut que $m = p^n$, p étant un nombre premier.

* On appelle équations non primitives les équations qui, étant, par exemple, du degré mn , se décomposent en m facteurs du degré n , au moyen d'une seule équation du degré m . Ce sont les équations de Gauss. Les équations primitives sont celles qui ne jouissent pas d'une pareille simplification.

3) Pour qu'une équation primitive du degré p^n soit résoluble par radicaux, il faut que, deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

Galois cite les cas très particuliers qui échappent à la dernière règle; par exemple, quand $m=3^2$ ou 5^2 , l'équation est alors du genre de celles qui déterminent la trisection et la quintisection des fonctions elliptiques.

Il dit que toutes ces propositions ont été déduites de la théorie des permutations.

Il donne encore d'autres résultats qui découlent de sa théorie:

1) Soit k le module d'une fonction elliptique, p un nombre premier donné plus grand que 3; pour que l'équation du degré $p+1$, qui donne les divers modules des fonctions transformées relativement au nombre p , soit résoluble par radicaux, il faut de deux choses l'une: ou bien qu'une des racines soit rationnellement connue, ou bien que toutes soient des fonctions rationnelles les unes des autres. Il ne s'agit ici, bien entendu, que des valeurs particulières du module k . Il est évident que la chose n'a pas lieu en général. Cette règle n'a pas lieu pour $p=5$.

2) L'équation modulaire générale du sixième degré, correspondant au nombre 5, peut s'abaisser à une du cinquième degré dont elle est la réduite. Au contraire, pour des degrés supérieurs, les équations modulaires ne peuvent s'abaisser.

Cette dernière remarque a été corrigée plus tard par Galois lui-même; dans sa lettre à Chevalier (1) p. 29, il déclare l'abaissement du degré $p+1$ au degré p possible, non seulement pour $p=5$, mais encore pour $p=7$ et pour $p=11$; il en maintient l'impossibilité pour $p>11$.

Tous ces résultats ont été confirmés plus tard par *Betti*, *Hermite* et *Jordan*.

Le cahier de juin du Bulletin de Férussac (1830) contient une note sur la résolution des équations numériques (1) p. 13 et 14, et un travail important *Sur la théorie des nombres* (1) p. 15 à 23, où il introduit des symboles (les imaginaires de Galois) qui permettent de ramener les congruences à la proposition (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre autant de racines qu'il y a d'unités dans leur degré. De plus, la considération des racines imaginaires des congruences donne un moyen simple de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux.

Sur ce dernier travail publié par Galois lui-même, on peut lire les pages 14-18 du Traité des substitutions de *Camille Jordan* (1870) et le chapitre III (tome second) du Cours d'Algèbre supérieure de *J.-A. Serret*, sur les propriétés des fonctions entières d'une variable, relativement à un module premier, en particulier les pages 179 à 189 des dernières éditions. Une théorie détaillée se trouve dans la monographie de *L. E. Dickson*: *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. (Leipzig, 1901.) Les paragraphes 18 et 19 du beau livre de *A. Speiser*: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (J. Springer, Berlin, 1927, ou New York, Dover Publications, 1945) sont aussi consacrés aux imaginaires de Galois.

En 1829, un des rédacteurs du Bulletin de Férussac était le jeune mathématicien suisse *Charles Sturm*, né à Genève en 1803, mort à Paris en 1855. Elu à l'Académie

des Sciences en 1836, il fut répétiteur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique en 1838 et y succéda à *Poisson* en 1840. *Bertrand* raconte (5) qu'un camarade de *Galois* apporta un jour à l'Ecole Normale le numéro de juin 1829 du Bulletin de Férussac qui donnait l'énoncé du théorème d'algèbre par lequel Sturm est devenu célèbre. Le professeur Leroy attendait comme les étudiants que l'auteur fît connaître la démonstration. Galois arriva dans la salle; on lui communiqua l'énoncé. Après quelques minutes de réflexion, il alla au tableau et donna la démonstration.

On ne sait pas grand'chose sur les relations entre Sturm et Galois; il semble pourtant (8) qu'ils furent amis, car le nom de Sturm se trouve au premier rang d'une liste d'envoi de deux travaux dont Galois préparait la publication quelques mois avant sa mort.

En février 1830, Galois présenta ses recherches à l'Académie en vue du Grand prix des mathématiques. Le manuscrit fut remis au Secrétaire perpétuel, le baron *Fourier* (1768-1830), bien connu par sa Théorie analytique de la chaleur et les séries trigonométriques qui portent son nom. Mais *Fourier* mourut avant d'avoir examiné le manuscrit. On ne le retrouva pas dans ses papiers.

Après l'oubli de Cauchy l'année précédente et cette nouvelle perte d'un mémoire précieux, on devine le désespoir et la colère du jeune mathématicien.

Arago (1786-1853) a expliqué la perte du mémoire par le désordre dans lequel on a trouvé les papiers de *Fourier*. D'autre part on a accusé Cauchy de négligence; il était trop absorbé par ses propres recherches.

«Dans ces mésaventures répétées», nous dit Paul Dupuy (4) «Galois vit l'effet, non du hasard, mais d'une organisation sociale mauvaise qui condamnait le génie à un éternel déni de justice au profit de la médiocrité. Il en rendit responsable le régime d'oppression politique contre lequel s'accumulait l'orage».

Il eut la joie de voir la bourgeoisie entière se lever avec le peuple contre les Bourbons, à la suite des fameuses «Ordonnances» de *Charles X* qui devait casser les élections récentes et supprimer la liberté de la presse.

Pendant les trois jours de la Révolution de Juillet, le directeur de l'Ecole Normale, *Guignault*, empêcha les élèves de sortir. On imagine la fureur de Galois quand on le tenait enfermé avec ses camarades tandis que les étudiants de l'Ecole Polytechnique prenaient part à l'insurrection.

Quand *Louis-Philippe* fut nommé Intendant général, puis Roi des Français, Galois eût préféré la proclamation de la République.

Intervenant dans un débat entre *Guignault* et le rédacteur de la «Gazette des Ecoles», Galois envoya à ce journal une lettre datée du 3 décembre 1830, où il ne ménageait pas le directeur qui a empêché les élèves de combattre pour la liberté. «Tout en lui annonce les idées les plus étroites et la routine la plus complète», dit-il en terminant. Il avait signé de son nom. Mais le directeur du journal a mis, pour ne pas compromettre l'auteur: Un élève de l'Ecole Normale. Il était cependant facile de le découvrir et il fut mis

à la porte pour sa lettre «anonyme». — Le directeur Guignault, en annonçant l'expulsion de Galois au Ministre de l'instruction publique, jugeait bien légèrement un caractère qu'il n'avait pas compris. «Il n'y a plus», disait-il, «de sentiment moral chez ce jeune homme».

Galois, chassé de l'Ecole Normale, ouvrit alors, dès le jeudi 13 janvier 1831, un cours public d'Algèbre supérieure.

«Ce cours», annonçait la Gazette des Ecoles, «aura lieu tous les jeudis à une heure et quart; il est destiné aux jeunes gens qui, sentant combien est incomplète l'étude de l'Algèbre dans les collèges, désirent approfondir cette science. Le cours se composera de théories dont quelques-unes sont neuves, et dont aucune n'a jamais été exposée dans les cours publics. Nous nous contenterons de citer une théorie nouvelle des imaginaires, la théorie des équations qui sont solubles par radicaux, la théorie des nombres et les fonctions elliptiques traitées par l'algèbre pure.»

On ne sait pas si ce cours, ouvert devant une quarantaine d'auditeurs, dura longtemps.

Le 17 janvier 1831, l'Académie des Sciences recevait pour la troisième et dernière fois un Mémoire de Galois: «Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux».

Cauchy n'était plus à Paris. Partisan de la branche aînée des Bourbons, il refusa de prêter serment à Louis-Philippe et dut quitter sa chaire. Il se rendit à Turin, puis à Prague où il enseigna les sciences au duc de Bordeaux de 1833 à 1838. De retour à Paris, il professa d'abord dans des établissements religieux. En 1848, le nouveau gouvernement lui donna la chaire d'Astronomie mathématique à la Faculté des Sciences. Il mourut le 25 mai 1857. Son activité fut prodigieuse aussi bien en mécanique et en physique théorique qu'en mathématiques pures. Sa plus grande création fut celle de la théorie des fonctions de variables complexes.

L'examen du manuscrit de Galois fut confié à *Poisson* (1781-1840) et à *Lacroix* (1765 à 1843). Un accusé de réception fut adressé à l'auteur. Il attendit pendant plus de deux mois le rapport des commissaires. Enfin, impatienté, il écrivit au Président de l'Académie, le 31 mars 1831, la lettre suivante (5) p. 207, et (8):

Monsieur le Président,

J'ose espérer que Messieurs Lacroix et Poisson ne trouveront pas mal que je rappelle à leur souvenir un mémoire relatif à la théorie des équations dont ils ont été chargés il y a trois mois.

Les recherches contenues dans ce mémoire faisaient partie d'un ouvrage que j'avais mis l'année dernière au concours pour le Grand prix des mathématiques, et où je donnais, dans tous les cas, des règles pour reconnaître si une équation était ou non soluble par radicaux. Comme ce problème a paru, jusqu'ici, sinon impossible, du moins fort difficile aux géomètres, la commission jugea a priori que

je ne pouvais avoir résolu ce problème, en premier lieu parce que je m'appelle Galois, de plus parce que j'étais étudiant. Et l'on me fit savoir que mon mémoire était égaré. Cette leçon aurait dû me suffire. Toutefois sur l'avis d'un honorable membre de l'Académie, je refis en partie mon mémoire et vous le présentai. Vous voyez, Monsieur le Président, que mes recherches ont subi jusqu'à ce jour à peu près le même sort que celles des quadratureurs. L'analogie sera-t-elle poussée jusqu'au bout? Veuillez, Monsieur le Président, me faire sortir d'inquiétude en invitant MM. Lacroix et Poisson à déclarer s'ils ont égaré mon mémoire ou s'ils ont l'intention d'en rendre compte à l'Académie.

Agréez, Monsieur le Président, l'hommage de votre respectueux serviteur.

E. Galois.

Mais il dut attendre encore.

Pendant ce temps, il prit une part toujours plus active aux nombreuses émeutes qui inquiétaient alors les Parisiens.

Sa seconde passion, la politique, refoula celle des mathématiques. Selon sa propre expression, «son cœur se révolta contre sa tête».

L'artillerie de la garde nationale était un foyer d'opposition républicaine. Galois tenait à en faire partie. Elle fut licenciée. Ses officiers furent arrêtés comme conspirateurs. Le jury les acquitta. On organisa alors en leur honneur un banquet patriotique au restaurant des *Vendanges de Bourgogne* le 9 mai 1831. *Alexandre Dumas* père en parle dans ses Mémoires. On improvisa des discours de plus en plus violents. Le jeune Galois termina son toast en levant son couteau ouvert et en s'écriant: «A Louis-Philippe!»

Le lendemain, on venait le chercher chez sa mère pour le mettre en prison. Sa peine devait durer plusieurs mois. Mais il avoua tout et il prétendit qu'il avait ajouté à son exclamation finale «A Louis-Philippe» les mots «s'il trahit». Il fut mis en liberté le 15 juin 1831.

Le 4 juillet, *Poisson* présentait enfin le rapport si longtemps attendu. Ce fut pour Galois une grande désillusion. *Poisson* déclarait ses raisonnements incompréhensibles.

M. *René Taton* cite intégralement ce rapport dans sa notice (8) de décembre 1947. En voici la conclusion, déjà indiquée par *Joseph Bertrand* (5) page 208:

«Nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude, et nous ne serions pas même en état d'en donner une idée dans ce rapport. L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'applications. Souvent il arrive que les différentes parties d'une théorie en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive. Mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'Académie, nous ne pouvons pas vous proposer d'y donner votre approbation.»

Poisson, Lacroix.

L'Académie adopte les conclusions de ce rapport.

Personne ne pouvait alors prévoir la fin prématurée de l'auteur. D'autre part la Mécanique rationnelle et la Physique mathématique intéressaient Poisson beaucoup plus que l'Algèbre. S'il avait demandé quelques explications au jeune étudiant qui n'était plus en prison depuis le 15 juin, il aurait sans doute compris ses démonstrations et l'œuvre de Galois eût été connue quinze ans plus tôt. Aurait-il pu, dans ce cas, refréner sa passion politique? C'est difficile à dire.

Le 14 juillet, il est à la tête d'une manifestation républicaine, habillé en artilleur de la garde nationale, armé d'un fusil et d'un poignard. Arrêté sur le Pont-Neuf, condamné à six mois de prison, on l'enferme à Sainte-Pélagie dans la section des agitateurs politiques. Dans ses «Lettres sur les prisons de Paris», un de ses camarades, le chimiste et politicien *Raspail* (1794-1878), a raconté les scènes qui se passaient à Sainte-Pélagie: les unes touchantes, quand les prisonniers se réunissaient le soir pour chanter en chœur des chants patriotiques et défilaient devant le drapeau avant de remonter, — les autres navrantes, quand les camarades se moquaient de l'infortuné Galois parce qu'il n'avait pas le courage de boire et qu'un jour, par bravade, il avala toute une bouteille d'eau-de-vie pour la jeter ensuite à la tête de son provocateur.

Paul Dupuy a reproduit quelques-unes de ces scènes dans l'étude (4) qu'il a publiée en 1896, quand il était secrétaire de l'Ecole Normale.

Mais Galois aurait voulu se remettre au travail. Il marchait souvent pendant plusieurs heures dans la cour de la prison en méditant.

Parmi les papiers qu'il écrivait à Sainte-Pélagie, il y a la préface d'un ouvrage qu'il désirait publier. *M. Taton* nous la donne intégralement dans sa notice (8). Comme lui, j'avais noté le passage indiqué déjà par *Jules Tannery* (6), où Galois parle de l'élégance de l'esprit qui peut saisir en même temps un grand nombre d'opérations.

«Sauter à pieds joints sur les calculs; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes; telle est, selon moi, la mission des géomètres futurs; telle est la voie où je suis entré. Il ne faut pas confondre l'opinion que j'émetts ici, avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et en ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer.»

Parlant de la filiation des idées mathématiques, il dit (6) p. 31: «Ici comme dans toutes les sciences chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment: il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés comme malgré eux. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à plusieurs comme une révélation. Si l'on en cherche la cause, il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés où ces idées sont présentes à l'insu de leurs auteurs.»

A la longue, on vit à Sainte-Pélagie que Galois n'était pas avant tout celui qui voulait tuer Louis-Philippe, qu'il y avait autre chose en lui. Il fut l'objet d'une mesure de bienveillance. Pendant l'épidémie de choléra, on le fit sortir de prison le 16 mars 1832 et on l'envoya dans une maison de santé. Mais cette bienveillance fut cause de sa perte.

On a même dit que tout ce qui allait se passer dans la suite était une machination des royalistes pour se débarrasser d'un jeune républicain dangereux.

Chez M. Faultrier, directeur de la maison de santé, Galois était prisonnier sur parole. Il y fit la connaissance d'une coquette de bas étage. En parlant d'elle, il écrit le 25 mai à son ami Chevalier :

«Comment me consoler d'avoir épuisé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir épuisée sans bonheur, sans espoir?»

Il fait cependant des projets d'avenir :

«J'irai te voir le premier juin. J'espère que nous nous verrons souvent pendant la première quinzaine de juin. Je partirai vers le 15 pour le Dauphiné.»

Un jour, il s'est trouvé en présence d'un prétendu oncle de cette femme et d'un prétendu fiancé (on croit que c'est Pécheux d'Herbinville). Chacun d'eux l'aurait provoqué en duel. Il a, paraît-il, fait tout ce qu'il a pu pour l'éviter.

Le 29 mai, veille du duel, sûr de la mort qui l'attend, il écrit à deux de ses amis : N. L... et V. D... (probablement Lebon et Duchâtelet) :

«Mes bons amis,

J'ai été provoqué par deux patriotes... il m'a été impossible de refuser.

Je vous demande pardon de n'avoir averti ni l'un ni l'autre de vous. Mais mes adversaires m'avait sommé sur l'honneur de ne prévenir aucun patriote.

Votre tâche est bien simple : prouver que je me suis battu malgré moi, c'est-à-dire après avoir épuisé tout moyen d'accommodement, et dire si je suis capable de mentir, de mentir même pour un si petit objet que celui dont il s'agissait.

Gardez mon souvenir puisque le sort ne m'a pas donné assez de vie pour que la patrie sache mon nom.

Je meurs votre ami

E. Galois.»

Une autre lettre est adressée à tous les patriotes républicains :

«Je prie les patriotes mes amis de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays. Je meurs victime d'une infâme coquette. C'est dans un misérable cancan que s'éteint ma vie.

Oh! pourquoi mourir pour si peu de chose, mourir pour quelque chose d'aussi méprisable?

Je prends le ciel à témoin que c'est contraint et forcé que j'ai cédé à une provocation que j'ai conjurée par tous les moyens.

Je me repens d'avoir dit une vérité funeste à des hommes si peu en état de l'entendre de sang-froid. Mais enfin j'ai dit la vérité.

J'emporte au tombeau une conscience nette de mensonge, nette de sang patriote. Adieu! j'avais bien de la vie pour le bien public. Pardon pour ceux qui m'ont tué, ils sont de bonne foi.

E. Galois.»

Enfin, il passe toute la nuit du 29 au 30 mai à rédiger sa célèbre «*Lettre à Auguste Chevalier*», son *testament scientifique* (1) p. 25 à 32. Il a devant lui son Mémoire refusé par Poisson, où il a fait quelques corrections (1), p. 33 à 50. Son but était de développer une théorie générale des équations algébriques qui peuvent être résolues au moyen d'équations auxiliaires de degrés inférieurs. Il a reconnu que ce difficile problème est régi dans chaque cas particulier par un certain *groupe de substitutions* des racines

de l'équation, (1) p. 39. Il a saisi l'importance de la notion que l'on appelle aujourd'hui *sous-groupe invariant* d'un groupe donné (en allemand *Normalteiler*). Il a démontré, entre autres, le théorème: «Si une équation irréductible de degré premier est soluble par radicaux, le groupe de cette équation ne contient que des substitutions de la forme $x_k \rightarrow x_{ak+b}$, a et b étant des constantes» — et les deux théorèmes déjà énoncés à la page 7: «Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement», «Pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut que son degré soit de la forme p^n , p étant premier.»

Il pense qu'on pourrait grouper ses travaux en *trois Mémoires*.

«Le premier est écrit, et, malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens, avec les corrections que j'ai faites.»

Le second devait contenir des applications de la théorie des équations. C'est ici qu'il définit ce qu'il appelle la *décomposition propre* d'un groupe. «Quand un groupe G en contient un autre H , le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution; en sorte que

$$G = H + HS + HS^1 + \dots$$

Et aussi il peut se diviser en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T^1H + \dots$$

Ces deux genres de décomposition ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre*»

On dit aujourd'hui: Un groupe H est un *sous-groupe invariant* d'un autre groupe G , quand la transformée de H par une substitution quelconque de G est identique à H ,

$$GHG^{-1} = H \text{ ou } GH = HG.$$

Galois continue ainsi: «Il est aisé de voir que, quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre, en sorte qu'il se partage en m groupes de n permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations: l'une aura un groupe de m permutations, l'autre un de n permutations. Lorsqu'on aura épuisé sur le groupe d'une équation tout ce qu'il y a de décompositions propres possibles sur ce groupe, on arrivera à des groupes qu'on pourra transformer, mais dont les permutations seront toujours en même nombre. Si ces groupes ont chacun un nombre *premier* de permutations, l'équation sera soluble par radicaux; sinon, non.»

On dirait aujourd'hui: On peut réduire le groupe d'une équation par l'adjonction des racines d'une équation de degré inférieur; on raisonne sur le nouveau groupe comme sur le précédent, et ainsi de suite. On a donc une succession de groupes, chaque groupe

étant un sous-groupe invariant du groupe précédent. Pour que l'équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que le quotient des ordres de chaque groupe et du groupe suivant soit un nombre *premier*.

Jordan appelle ces quotients: les *facteurs de composition* du groupe. Pour les équations du troisième et du quatrième degré, ces facteurs de composition sont les nombres premiers 2 et 3.

Pour les équations générales de degré $n > 4$, un des facteurs de composition est 2; l'autre est le nombre $\frac{n!}{2}$ qui n'est *pas premier*. On en conclut que l'équation générale de degré $n > 4$ n'est pas résoluble algébriquement: c'est le théorème démontré par Abel et Ruffini qui se plaçaient évidemment à un tout autre point de vue que Galois.

Un groupe susceptible d'une décomposition propre est dit *composé*; s'il est indécomposable, il est dit *simple*. La distinction entre groupes simples et composés est fondamentale; elle dépasse le domaine de l'algèbre et s'étend au concept de groupes d'opérations dans son sens le plus vaste.

Si l'on veut approfondir cette théorie de Galois, on peut lire le grand «Traité des substitutions et des équations algébriques» de *Camille Jordan* (Paris, 1870) ou le dernier chapitre des dernières éditions du «Cours d'Algèbre supérieure» de *J.-A. Serret*, dont il sera question plus loin.

A ceux qui étudient ces questions pour la première fois, on peut recommander: les «Leçons sur la résolution algébrique des équations» de *H. Vogt*, l'«Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure» de *Borel et Drach*, les deux livres ont été publiés chez Nony, Paris, 1895; en outre, le chapitre XVI du Traité d'Analyse d'*Emile Picard*, tome III.

En langue allemande, on lira le livre de *E. Netto*: «Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra» (Leipzig, Teubner, 1882) et le beau Mémoire de *O. Hölder*: «Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen» (Mathem. Annalen t. 34, 1889).

En anglais: *Emil Artin*, Galois Theory (70 pages) Notre Dame, Mathematical lectures, 1942.

Le deuxième Mémoire prévu par Galois dans son testament devait aussi contenir des *applications de sa théorie aux fonctions elliptiques* et en particulier aux équations algébriques provenant de la division et de la transformation de ces fonctions transcendentes. Sur un papier inédit de Galois (6), p. 55, on trouve cette phrase: «Par un hasard que nous n'avions pas prévu, il arrive que la méthode proposée dans mon mémoire sur la théorie des équations s'applique avec succès à la division des fonctions elliptiques en un nombre premier de parties égales.»

Gauss avait démontré que les équations de la division du cercle sont résolubles par radicaux: *Abel* était arrivé au même résultat pour les équations de la division des fonctions elliptiques, en supposant la division des périodes effectuées. Mais il restait à étudier les équations modulaires dont dépend la division des périodes. *Galois* détermina leur groupe et trouva que, pour la division des périodes par un nombre premier p , l'équa-

tion modulaire est de degré $(p+1)$; elle n'est pas résoluble par radicaux pour $p > 3$, mais peut s'abaisser au degré p pour $p=5, 7$ et 11 et seulement pour ces nombres. Galois n'a pas eu le temps de donner les démonstrations de ces résultats.

Le troisième Mémoire concerne les *intégrales de fonctions algébriques*. Dans ce domaine, Galois eût été le continuateur d'Abel et de Jacobi. Mais on ne connaît rien d'autre de lui que ce qui figure dans son testament (1) p. 29-32. Il parle des périodes d'une intégrale abélienne relative à une fonction algébrique quelconque. Il fait la classification en trois espèces de ces intégrales et affirme que, si n désigne le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes, les périodes seront en nombre $2n$. Il semble qu'il avait déjà des résultats que *Riemann* (1826-66) devait trouver 25 ans plus tard. Il donne aussi une généralisation de l'équation de *Legendre*, où figurent les périodes des intégrales elliptiques. Enfin, reliant ces questions à l'Algèbre, il trouve que:

1) L'équation qui donne la division des périodes en p parties égales est du degré $p^{2n}-1$. Son groupe a $(p^{2n}-1)(p^{2n}-p)\dots(p^{2n}-p^{2n-1})$ permutations.

2) L'équation qui donne la division d'une somme de n termes en p parties égales est du degré p^{2n} . Elle est soluble par radicaux.

Et voici la fin de ce testament historique:

«Tu feras imprimer cette lettre dans la *Revue encyclopédique*.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'énoncer des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion.

Le 29 mai 1832.

E. Galois.»

Tu feras imprimer cette lettre dans la revue Encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et j'ai trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois. Le 29 Mai 1832.

Après cette nuit de travail intense, il devait aller sur le terrain. Cruelle destinée ! Parmi ses calculs, il avait écrit :

« L'éternel cyprès m'environne :
Plus pâle que la pâle automne,
Je m'incline vers le tombeau. »

Le duel eut lieu le 30 mai de bonne heure. La balle, tirée à 25 pas, traversa les intestins. Un paysan releva le blessé et l'amena à l'hôpital. La blessure était mortelle. Galois le savait. Son jeune frère, Alfred, seul de la famille, avait été prévenu. Il arriva tout en larmes.

« Ne pleure pas », lui dit Evariste, « j'ai besoin de toute mon énergie pour mourir à vingt ans ».

Le soir, la péritonite se déclara et le lendemain matin à 10 heures, il était délivré de ses souffrances.

Sa mort fut pour la science une perte immense.

Mais bien que son génie ait été trop longtemps ignoré, la tombe ne l'a pas pris tout entier.

En septembre 1832, son ami Chevalier lui a consacré une notice nécrologique dans la Revue encyclopédique de Paris.

C'est en 1846 seulement que les Œuvres scientifiques de Galois ont été publiées par *Joseph Liouville* (1809-1882) dans le Journal de mathématiques pures et appliquées qu'il avait fondé en 1836 pour remplacer les Annales de Gergonne où Galois avait fait paraître ses premiers travaux.

Après la publication de Liouville, *Jacobi* écrivit à *Alfred Galois* pour lui demander s'il y avait dans les papiers de son frère quelque chose sur la théorie des fonctions transcendentes. Il reçut la réponse le 17 novembre 1847 ; elle a été publiée par *Leo Königsberger* en 1904 dans sa belle biographie de Jacobi, offerte à tous les participants au troisième congrès international des mathématiciens à Heidelberg (8-13 août 1904). La fille de Liouville, *Madame de Blignières* a trouvé le brouillon de la lettre parmi les papiers de son père ; elle a été reproduite par *Jules Tannery* (6) p. 33 en 1908. Voici cette lettre :

« Monsieur,

J'ai l'honneur de vous envoyer, en vous priant d'en agréer l'hommage, un exemplaire de la première partie des Œuvres mathématiques de mon frère.

Il y a près d'un an qu'elle a paru dans le Journal de M. Liouville, et, si je ne vous l'ai pas adressée plus tôt, c'est que, sans cesse, j'espérais pouvoir vous faire remettre d'un jour à l'autre l'Ouvrage complet, dont la publication s'est trouvée retardée par diverses circonstances. Au reste, cette première partie renferme ce que

mon pauvre Evariste a laissé de plus important et nous n'avons guère à y ajouter que quelques fragments arrachés au désordre de ses papiers. Ainsi on n'a rien retrouvé concernant la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes; on voit seulement qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondie de vos Ouvrages. Quant à la théorie des équations, M. Liouville et d'autres géomètres que j'ai consultés affirment que son Mémoire, si durement repoussé par M. Poisson, contient les bases d'une doctrine très féconde et une première application importante de cette doctrine. «Ce travail, me disent-ils, assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des Mathématiques». Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de telles paroles; si votre précieux suffrage, qu'Evariste aurait ambitionné par-dessus tout, venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation; il deviendrait pour notre Evariste un gage d'immortalité, et je croirais que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe.»

Liouville avait annoncé un *commentaire* aux Œuvres de Galois. Il ne l'a jamais fait. En revanche, il a invité quelques amis à entendre une série de leçons sur les travaux du génial mathématicien. Un ancien élève de l'Ecole Polytechnique, officier d'artillerie qui avait donné sa démission pour se consacrer entièrement à ses études scientifiques, assistait à ces conférences: c'était *Joseph-Alfred Serret* (1819-1885). La première édition de son beau Cours d'Algèbre supérieure, résumé de leçons professées à la Sorbonne en 1848, ne contenait rien sur les découvertes de Galois. Serret pensait qu'il ne lui était pas permis d'usurper les droits du maître qui l'en avait instruit.

Lors de la deuxième édition (1854), le projet de Liouville paraissant abandonné, Serret rédigea la théorie de Galois; il y consacrait 61 pages qui furent imprimées et dont Joseph Bertrand avait corrigé les épreuves (5) p. 210. Mais, après réflexion, Serret se décida, cédant au désir de Liouville, à supprimer les 61 pages et à les remplacer par des Notes sur d'autres sujets d'Algèbre. Il a cependant ajouté un chapitre où il expose en détail la théorie des *imaginaires de Galois* (1) p. 15 à 23. «Je me suis proposé, dit-il, de faciliter l'intelligence d'une partie difficile des travaux de ce grand géomètre. Le beau Mémoire «Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux» présente aussi quelques difficultés que j'aurais vivement désiré éclaircir en faisant connaître le résultat de mes études sur cette théorie. Mais les considérations qui m'ont retenu lors de la première édition m'imposent encore aujourd'hui la même réserve.»

A partir de la troisième édition (1866), le dernier chapitre du Cours de Serret est consacré à ce Mémoire de Galois; il suit exactement l'ordre des propositions adopté par l'auteur.

En 1852 déjà, un jeune géomètre italien *Enrico Betti** (1823-1892), qui avait lu la première édition du Cours de Serret, publia, sans attendre le commentaire de Liouville, un mémoire important: «Sulla risoluzione delle equazioni algebriche» (Op. mat. t. I, p. 31-80) où les théorèmes de Galois ont été démontrés rigoureusement pour la première fois.

* Souvent cité dans les travaux modernes de topologie, à cause des invariants que *Henri Poincaré* (1854-1912) a appelés: *nombres de Betti*. — *Betti*: Ann. di mat. (2), 4 (1871) p. 140, ou Op. mat. t. II. p. 273. — *Poincaré*: Journal de l'Ec. polyt. (2) 1, (1895) p. 19.

Immédiatement après ce beau Mémoire, Betti en publie un autre le 27 novembre 1852: «Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche» (Op. mat. t. I, p. 81-95) où il démontre les résultats énoncés par Galois dans son testament scientifique (1) p. 29. De plus, il trouve que l'équation de degré $p^2 - 1$ servant à déterminer $sn \frac{\omega}{p}$ est décomposable en $(p + 1)$ facteurs de degré $(p - 1)$ résolubles par radicaux quand on adjoint les racines d'une équation de degré $(p + 1)$ qui n'est pas résoluble par radicaux, mais peut s'abaisser au degré p quand $p = 5, 7$ et 11 .

Il semble que *Charles Hermite* avait déjà vérifié que pour $p = 5, 7$ et 11 , les équations modulaires sont susceptibles d'un abaissement au degré p . En 1858, il effectue la réduction d'une manière complète pour $p = 5$; il trouve une équation du cinquième degré qui peut être identifiée avec l'équation réduite $x^5 - x - a = 0$, forme à laquelle un géomètre anglais *Jerrard* avait ramené l'équation générale du cinquième degré sans employer d'autres irrationalités que des racines carrées et cubiques. On sait que les racines de cette équation ne peuvent pas s'exprimer par radicaux. Mais Hermite s'est demandé si, en introduisant des variables auxiliaires, on arriverait à exprimer les cinq racines séparément par autant de fonctions distinctes et uniformes relatives à ces nouvelles variables. C'est l'analogie de la solution de l'équation du troisième degré à l'aide de fonctions trigonométriques. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2a = 0$, il suffit de représenter a par le sinus d'un angle α pour que les racines se séparent en ces trois fonctions bien déterminées:

$$2 \sin \frac{\alpha}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

C'est un fait semblable qu'*Hermite* a exposé (Œuvres t. II, p. 5-12) relativement à l'équation $x^5 - x - a = 0$. Seulement, au lieu des sinus, ce sont des transcendentes elliptiques qu'il faut introduire. L'équation du cinquième degré est ainsi résolue, en ce sens que ses racines s'expriment simplement à l'aide de fonctions elliptiques. Quelque temps après, *Kronecker* (1823-1891) et *Brioschi* (1825-1897) traitaient la même question sans faire la réduction préalable à l'équation de *Jerrard*.

Dans une note aux Comptes Rendus des Séances de l'Académie de Paris du 17 février 1868, *Camille Jordan* (1838-1922) démontre que, pour $p > 11$, le degré de l'équation modulaire ne peut pas être abaissé.

Jordan signait encore «Ingénieur des Mines» quand il publiait ses importantes Notes dans les Comptes Rendus (11 février, 18 mars, 10 juin 1867; 27 avril 1868; 1^{er} février 1869) et dans le Journal de Liouville (2^e série, t. 12, 1867; t. 13, 1868) sur la résolution algébrique des équations. Son but est de démontrer et de compléter les propositions de Galois. Dans une Note des Comptes Rendus, intitulée: *Sur les équations de la Géométrie* (15 mars 1869), il examine les équations remarquables fournies par les problèmes géométriques de *Clebsch*, *Hesse*, *Kummer*, *Steiner*. C'est grâce aux communications de *Clebsch* (1833—1872) qu'il a pu aborder ces problèmes.

Toutes ces recherches ont été réunies en corps de doctrine par *Jordan* dans son grand *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870). Il dit modestement dans la Préface: «Parmi les Ouvrages que nous avons consultés, nous devons citer particulièrement, outre les Œuvres de *Galois*, dont tout ceci n'est qu'un commentaire, le Cours d'Algèbre supérieure de *J.-A. Serret*. C'est la lecture de ce livre qui nous a initié à l'algèbre et nous a inspiré le désir de contribuer à ses progrès.»

A la fin de son *Traité*, *Jordan* détermine les divers types généraux d'équations solubles par radicaux et obtient pour ces types un système complet de classification.

Les premiers chapitres sont consacrés aux notions fondamentales relatives aux congruences, à l'étude des substitutions en général, à celles dont la forme est définie analytiquement et surtout aux substitutions linéaires. Les idées de *Galois* sont ensuite approfondies et complétées par des résultats essentiels sur les groupes primitifs, les groupes transitifs et les groupes composés. *Jordan* a trouvé, entre autres, que les *facteurs de composition* d'un groupe sont les mêmes, à l'ordre près, de quelque manière qu'aient été effectuées les opérations qui les déterminent.

La théorie de *Galois* ne fait intervenir que des groupes de *substitutions*. Mais les méthodes de la théorie des groupes sont indépendantes de la signification spéciale de ses éléments.

Le *Traité* de *Jordan* avait fait une grande impression sur deux jeunes mathématiciens étrangers venus à Paris en avril 1870 pour y continuer leurs études: *Felix Klein* (1849 à 1925) et *Sophus Lie* (1842-1899). Leurs contributions au progrès de la théorie des groupes sont très importantes. Ils ont reconnu que les notions introduites par *Galois* jouent aussi en *Géométrie* et en *Analyse* un rôle capital; elles s'étendent au concept de groupe d'opérations dans son acception la plus large; elles permettent de considérer comme identiques des résultats qui semblaient autrefois complètement distincts.

Klein venait de publier sa thèse de doctorat; elle est dédiée à son maître *Plücker* (1801-1868), créateur de la *géométrie réglée*. Dans cette géométrie, une droite est déterminée par 6 coordonnées homogènes liées par une relation quadratique. D'autre part, *Gaston Darboux* (1842-1917) avait créé sa théorie des cyclides à l'aide de 6 coordonnées (pentasphériques) liées aussi par une relation quadratique. On peut donc trouver une liaison entre ces deux géométries au moyen de substitutions linéaires transformant l'une dans l'autre ces deux relations quadratiques. Cette transformation a été étudiée spécialement par *Lie*. Il l'avait trouvée à Paris en juillet 1870 et l'a exposée l'année suivante dans les «*Mathematische Annalen*», tome V, p. 145-256: «Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differentialgleichungen».

Deux droites qui se coupent se transforment en deux sphères tangentes. Aux deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique réglée correspondent les deux systèmes de sphères tangentes à une surface du quatrième ordre: la *cyclide* dont *Dupin* et *Steiner* avaient trouvé les principales propriétés. Les lignes de courbure d'une surface sont transformées en lignes asymptotiques de la surface correspondante.

La transformation «droite-sphère» appartient au type très général des *transformations*

de contact dont *Lie* a fait de nombreuses applications dans sa théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans le même tome V des «*Mathematische Annalen*», *Klein* a publié un Mémoire intitulé: «*Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*» (p. 257-303), où il montre que la géométrie réglée de l'espace à 3 dimensions E est équivalente à la géométrie sur une hyperquadrique H de l'espace à 5 dimensions. A une droite, à une surface réglée, à une congruence et à un complexe de droites de l'espace E correspondent respectivement un point, une courbe, une surface et une variété à 3 dimensions de H .

Dans son célèbre «*Programme d'Erlangen*» (1872), *Klein* a fait faire un grand progrès à la géométrie en la reliant à la notion de groupe de transformations. A chaque géométrie correspond un groupe. Construire une géométrie, c'est se donner un ensemble d'éléments et un groupe de transformations de ces éléments, puis chercher les propriétés de cet ensemble qui sont invariantes pour les transformations du groupe. On l'appelle le *groupe principal* P de la géométrie considérée G . Si P^1 est un sous-groupe de P et G^1 la géométrie ayant P^1 pour groupe principal, on dit que la géométrie G^1 est *subordonnée* à la géométrie G .

Ainsi, la géométrie euclidienne est subordonnée à la géométrie affine qui est elle-même subordonnée à la géométrie projective.

La géométrie algébrique a pour groupe principal celui des transformations birationnelles.

On a divisé les groupes en deux grandes classes: les groupes *discontinus* et les groupes *continus*. Dans le plan, par exemple, les rotations de 0° , 120° et 240° autour d'un point fixe O forment un groupe discontinu d'ordre trois; il est compris dans le groupe continu de toutes les rotations autour de O , qui est lui-même un sous-groupe de celui de tous les mouvements dans le plan.

Après son programme d'Erlangen, *Klein* a étudié surtout les groupes *discontinus*, leurs applications à l'algèbre, aux fonctions modulaires et aux fonctions automorphes. *Lie* a entrepris la théorie plus difficile des groupes *continus* et leurs applications aux équations différentielles.

Dans la théorie des équations, on s'intéresse d'abord aux fonctions symétriques des racines, puis aux fonctions qui ne restent invariantes que pour *une partie* des permutations des racines.

De même, dans le groupe de tous les mouvements de l'espace, il y a des sous-groupes qui laissent une figure invariante, par exemple, un hélicoïde, une surface de révolution ou un polyèdre régulier.

Dans son beau livre «*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*» (Teubner, 1884), *Klein* étudie les groupes de rotations qui transforment les polyèdres réguliers en eux-mêmes.

Les quatre sommets 1, 2, 3, 4 du tétraèdre régulier se permutent par les trois rotations de 180° autour des droites joignant les milieux des côtés opposés; on passe ainsi de (1234) à (2143), (3412) et (4321). Ces quatre permutations forment un groupe que nous désignerons par B . Huit autres permutations cycliques de trois sommets proviennent des rotations de 120° et 240° autour des quatre hauteurs du tétraèdre.

Ces douze permutations forment le groupe *alterné* A de quatre éléments; c'est un sous-groupe invariant du groupe *symétrique* S des 24 permutations de ces éléments. Le groupe de l'octaèdre régulier (ensemble des rotations qui transforment l'octaèdre en lui-même) et le groupe S sont *isomorphes*. D'autre part, B est un sous-groupe invariant de A et les deux permutations (1234), (2143) forment un sous-groupe invariant C de B .

La *décomposition propre* du groupe de l'octaèdre dans le sens de Galois peut s'écrire:

$$S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1 \text{ (identité).}$$

Les facteurs de composition sont: 2 3 2 2 .

Si 1,2,3,4 désignent les quatre racines d'une équation du quatrième degré et si l'on forme successivement des fonctions de ces racines qui restent invariantes par les substitutions de A , puis de B et de C , on obtient une résolution de l'équation du quatrième degré par les extractions d'une racine cubique et de trois racines carrées. C'est la méthode indiquée par Galois (1) p. 45 dans le mémoire refusé par Poisson.*

Klein montre comment le groupe de l'icosaèdre se rattache à la résolution de l'équation du cinquième degré.

Dans les deux livres qu'il a publiés avec Fricke: «*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*» (1890 et 1892), Klein étudie en détail les fonctions modulaires, dont Hermite avait fait connaître la propriété essentielle: elles se reproduisent par des substitutions linéaires

$$1) \quad z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

à coefficients entiers et au déterminant $ad - bc = 1$.

C'est cette propriété des fonctions modulaires que Poincaré a généralisée en 1880 (à 26 ans) quand il a trouvé ses fameuses *fonctions fuchsienues*, ainsi désignées en l'honneur de son éminent collègue de Berlin, Lazarus Fuchs. Klein les appelle: *fonctions automorphes*; il leur a consacré le livre publié avec Fricke, intitulé: «*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*» (1897).

Deux exemples ont inspiré Poincaré: la fonction modulaire (Hermite) et l'inversion du quotient de deux intégrales de l'équation différentielle hypergéométrique (Schwarz).

Le rôle que jouait la périodicité dans les fonctions elliptiques est maintenant dévolu à un groupe de substitutions linéaires de la forme 1) où les constantes a, b, c, d sont soumises à une certaine condition.

Poincaré a énoncé cette condition sous la forme géométrique suivante: «Il existe un certain polygone limité par des arcs de cercles, le *polygone générateur*, qui est au groupe considéré ce que le parallélogramme des périodes est à la périodicité des fonctions elliptiques. Les polygones générateurs, tous homologues entre eux, c'est-à-dire dé-

* La solution de Netto, Subst. theorie, § 146, p. 159 correspond exactement à l'idée de Galois; elle se base sur le théorème important: «Deux fonctions appartenant au même groupe s'expriment rationnellement l'une par l'autre». Pratiquement, il y a des méthodes plus rapides pour résoudre l'équation du 4e degré. Voir Serret, Cours d'Algèbre supérieure, t. II, p. 477, 4e édition (1877), 7e édition (1928).

rivant les uns des autres par des substitutions du groupe, vont recouvrir exactement, sans lacune ni chevauchement, l'intérieur d'un cercle, comme le faisait, pour tout le plan dans le cas des fonctions elliptiques, le quadrillage formé par les parallélogrammes des périodes». Poincaré arrive ainsi à son modèle, aujourd'hui bien connu, de la *géométrie non-euclidienne*.

Il cherche ensuite les fonctions qui restent *invariantes* pour ce groupe de transformations. Ce sont les fonctions fuchsiennes. Elle jouissent de la propriété suivante:

«Deux quelconques de ces fonctions, appartenant au même groupe, sont liées par une relation algébrique».

Inversement, «les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes (fonctions uniformes d'un paramètre). Le problème de *l'uniformisation des courbes algébriques planes* de degré quelconque est alors résolu. Pour les courbes unicursales (genre zéro) et pour les courbes de genre un, ce sont respectivement les fonctions rationnelles et les fonctions elliptiques qui jouent ce rôle.

De plus «Toute fonction fuchsienne provient de l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients algébriques».

«L'intégration de toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques peut être obtenue à l'aide des fonctions appelées zétafuchsiennes par Poincaré.»

Après ces travaux de Poincaré, on s'est occupé des *groupes discontinus à deux variables* et des fonctions correspondantes. *Emile Picard* a étudié les groupes linéaires et quelques groupes quadratiques qui l'ont conduit aux fonctions appelées: hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.

La grandiose théorie des *groupes de transformations continus de Lie* lui a permis de faire sortir d'une même source les différentes méthodes d'intégration des équations différentielles. Son Œuvre a été continuée par *Engel*, *Killing* et *Elie Cartan*, dont les recherches concernent surtout la *structure* des groupes, la détermination des *groupes simples*, l'application de la notion de groupe dans la géométrie de Riemann et ses généralisations, qui ont semblé longtemps en être indépendantes.

Emile Picard a montré comment les idées de Galois pouvaient être étendues aux équations différentielles linéaires. Il a été suivi dans cette voie par *Drach* et par *Vessiot* qui a donné la condition pour qu'une équation différentielle linéaire soit intégrable par quadratures (problème correspondant à celui des équations algébriques résolubles par radicaux). Le dernier chapitre du *Traité d'Analyse* de Picard (tome III) est consacré à ces recherches.

La notion de groupe intervient aussi en *Cristallographie* et en *Physique*. La détermination de tous les types de groupes de mouvements d'ordre fini revient à l'étude des groupes de substitutions linéaires de déterminant ± 1 ; elle conduit aux 32 systèmes de symétrie de la cristallographie.

Dans le *principe de relativité d'Einstein*, les transformations du groupe de *Lorentz* n'altèrent pas les équations différentielles de la dynamique. Elles laissent invariante la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ qui se réduit à $x^2 + y^2 + z^2 + T^2$ si l'on pose $ct = iT$.

Tout se passe donc comme si l'espace à quatre dimensions (x, y, z, T) résultant de la combinaison de l'espace ordinaire et du temps pouvait tourner non seulement autour d'un axe de l'espace ordinaire de façon que le temps ne soit pas altéré, mais autour d'un axe quelconque (Poincaré).

Les éditeurs du Livre consacré au *Centenaire de l'Ecole Normale* (1895) ont demandé à *Sophus Lie* de rédiger la belle notice (3) relative à l'influence de Galois sur le développement des mathématiques. Lie a déclaré que la découverte de Galois était une des plus profondes qu'on ait jamais faites.

Le 13 juin 1909, la municipalité de Bourg-la-Reine a fait mettre une plaque commémorative sur la maison où est né Evariste Galois. Le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, *Gaston Darboux*, assistait à la cérémonie. Le Maire de la ville, le colonel Caudelot, avait prié le directeur de l'Ecole Normale, *Jules Tannery*, de prendre la parole à cette occasion. Voici la fin de son discours:

«Depuis la publication de Liouville, d'année en année, l'importance de l'Œuvre de Galois est apparue plus clairement; les plus grands mathématiciens ont reconnu l'influence considérable qu'elle a eue sur le progrès des mathématiques...

Je vous remercie, Monsieur le Maire, de me permettre de faire au génie de Galois amende honorable au nom de cette Ecole Normale où il est entré à regret, où il n'a pas été compris; elle l'a rejeté loin d'elle et il a été, malgré tout, une de ses gloires les plus éclatantes».

LOUIS KOLLROS, Zurich

BIBLIOGRAPHIE

1. *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois*, réimprimées en 1897 chez Gauthier-Villars, Paris, sous les auspices de la Société mathématique de France, avec une introduction par Emile Picard.
2. *Camille Jordan*. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, 1870, in 4° XVIII + 668 pages.
3. *Sophus Lie*. Influence de Galois sur le développement des mathématiques. Note publiée dans le volume «Le centenaire de l'Ecole Normale» 1795-1895.
4. *Paul Dupuy*. La vie d'Evariste Galois. Annales de l'Ecole Normale, série 3, vol. XIII, p. 197-266; 1896; étude réimprimée à la demande de Péguy dans les «Cahiers de la Quinzaine», 1903.
5. *Joseph Bertrand*. La vie d'Evariste Galois, par P. Dupuy. Bulletin des Sciences mathématiques. 1899, p. 198-212.
6. *Jules Tannery*. Manuscrits d'Evariste Galois, Gauthier-Villars, Paris 1918.
7. *Jules Tannery*. Discours prononcé le 13 juin 1909. Bulletin des Sciences mathématiques, 1909, p. 158-163.
8. *René Taton*. Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps. Cercle international de synthèse. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications t. I, p. 114, décembre 1947.

Biographies romancées:

Alexandre Arnoux. Algorithmes, chez Grasset, Paris 1948.

Leopold Infeld. Whom the Gods Love, the story of Evariste Galois. Whittlesey House, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, London, 1948.

Le portrait de Galois est extrait de ses Œuvres réimprimées en 1897 (Héliog. Dujardin; Imp. Ch. Wittmann).