Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **70 (2015)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Elem. Math. 70 (2015) 39 – 43
0013-6018/15/010039-5
DOI 10.4171/EM/271

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2015 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1335: Man zeige die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8k+3}-\frac{1}{8k-3}+\frac{1}{8k+1}-\frac{1}{8k-1}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{4}{3}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16k+7}-\frac{1}{16k-7}+\frac{1}{16k+1}-\frac{1}{16k-1}\right)=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pi}{8}-\frac{8}{7}.$$

Gleb Glebov, Burnaby, CAN

Aufgabe 1336: Ein zylindrisches Blechfass sei nicht leer und wird mit einer Flüssigkeit so gefüllt, dass es nicht ganz voll ist. Welche Forderungen muss man an das Verhältnis $H : R$ seiner Höhe H und seines Radius R stellen, damit es mit derselben Flüssigkeitsmenge möglich wird, bei liegendem oder stehendem Fass einen gleichen Flüssigkeitsstand h ($0 < h < 2R$ bzw. $0 < h < H$) messen zu können?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1337 (Die einfache dritte Aufgabe): Eine Zahlenfolge sei durch die Anfangsglieder a_0 und a_1 und für $n \geq 2$ durch die Rekursion $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ definiert. Welcher Rekursion genügen die Zahlenfolgen $d_n = a_n^2$ und $e_n = a_n a_{n-1}$?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2014

Aufgabe 1323.

a) Vier zufällige Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1 liegen unabhängig voneinander gleichverteilt auf der Sphäre S^2. Mit Wahrscheinlichkeit 1 besitzen P_0 und P_1 einen wohlbestimmten kürzesten Verbindungsbogen $\gamma \subset S^2$ und ebenso Q_0, Q_1 einen kürzesten Verbindungsbogen γ'. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Bögen schneiden.

b) Man behandle dasselbe Problem für zwei Punktepaare auf einem euklidischen Torus $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Die kürzesten Verbindungen sind dann Strecken.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es ist nur eine Zuschrift eingegangen: Joachim Klose (Bonn, D).

Wir geben die Lösung des Autors *Christian Blatter* wieder.

a) Mit Wahrscheinlichkeit 1 liegen P_0, P_1 auf einem bestimmten Grosskreis g und Q_0, Q_1 auf einem anderen Grosskreis h. Die beiden Kreise g und h halbieren sich gegenseitig in ihren Schnittpunkten. Damit sich die kürzesten Verbindungen γ und γ' schneiden, müssen P_0, P_1 in verschiedenen Hälften von g und ebenso Q_0, Q_1 in verschiedenen Hälften von h liegen. Schliesslich müssen die verbindenden Bögen γ und γ' über denselben Schnittpunkt von g und h laufen. Aus Symmetriegründen betragen die Wahrscheinlichkeiten für die drei genannten Ereignisse je $\frac{1}{2}$, und da sie offensichtlich voneinander unabhängig sind, hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{8}$.

b) Ist $\mathbf{0} = (0,0)$ ein Repräsentant von P_0, so ist der nächstgelegene Repräsentant $\mathbf{z}$ von P_1 gleichverteilt im Quadrat $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, und die Strecke $[\mathbf{0}, \mathbf{z}]$ repräsentiert die kürzeste Verbindung von P_0 und P_1 auf T. Ist analog $\mathbf{0} = (0,0)$ ein Repräsentant von Q_0, so ist der nächstgelegenen Repräsentant $\mathbf{w}$ von Q_1 gleichverteilt in Ω, und die Strecke $[\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ repräsentiert die kürzeste Verbindung von Q_0 und Q_1 auf T. In Wirklichkeit fallen P_0 und Q_0 nicht zusammen, sondern sind gleichverteilt gegeneinander verschoben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die verschobene Strecke $[\mathbf{c}, \mathbf{w}+\mathbf{c}]$, $\mathbf{c} \in T$, die verschobene Strecke $[\mathbf{0}, \mathbf{z}]$ trifft, ist gleich dem Flächeninhalt A des von $[\mathbf{0}, \mathbf{z}]$ und $[\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ aufgespannten Parallelogramms.

Wir betrachten nun ein festes $\mathbf{z}$ im ersten „Oktanten" Δ von Ω und schreiben $\mathbf{z}$ in der Form

$$\mathbf{z} = (x, mx), \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 \le m \le 1 \tag{1}$$

und berechnen den Erwartungswert $E(A \mid \mathbf{z})$ von A. Mit $\mathbf{w} = (u, v)$ ergibt sich

$$E(A \mid \mathbf{z}) = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{mu}^{1/2} (xv - mxu)\, dv\, du = x\left(\frac{1}{4} + \frac{m^2}{12}\right).$$

Aus Symmetriegründen genügt es, die weitere Rechnung mit den $\mathbf{z} \in \Delta$ gemäss (1) durchzuführen und das Resultat mit 8 zu multiplizieren. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit p zu

$$8\int_{\Delta} E(A \mid \mathbf{z})\, d(\mathbf{z}) = 8\int_0^{1/2}\int_0^1 x\left(\frac{1}{4}+\frac{m^2}{12}\right)x\, dm\, dx = \frac{5}{54}.$$

Aufgabe 1324. In einem Dreieck sei S der Schwerpunkt und P der zum Inkreismittelpunkt isotom konjugierte Punkt. Man verlängere PS mit $SQ = 2\cdot PS$. Man zeige:

a) Die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks durch P schneiden aus diesen Seiten gleichlange Strecken l_P. Man ermittle l_P in Abhängigkeit der Seitenlängen des Dreiecks.

b) Die Seiten der Dreiecks schneiden aus den Parallelen zu den Seiten durch Q gleichlange Strecken $l_Q = 2\cdot l_P$.

Gheorghe Bercea, München, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Beiträge von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Johannes M. Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Johannes Vigfusson (Brugg, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Die meisten Leser arbeiten in einem klassischen Koordinatensystem. Am besten lässt sich die Aufgabe aber mit baryzentrischen Koordinaten lösen, wie aus der Lösung von *Walter Burgherr*, dessen Lösung wir hier folgen, ersichtlich ist.

Die Punkte ($I =$ Inkreismittelpunkt) werden zunächst durch baryzentrische Koordinaten $(u : v : w)$ bezüglich A, B, C beschrieben:

$$S(1:1:1),\quad I(a:b:c),\quad P\left(\tfrac{1}{a}:\tfrac{1}{b}:\tfrac{1}{c}\right),\quad Q\left(-\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}:\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}:\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{c}\right).$$

a) Die baryzentrischen Koordinaten von P werden durch $u_P + v_P + w_P = 1$ normiert. Die Parallele zu BC durch P wird durch

$$u = \frac{1}{a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

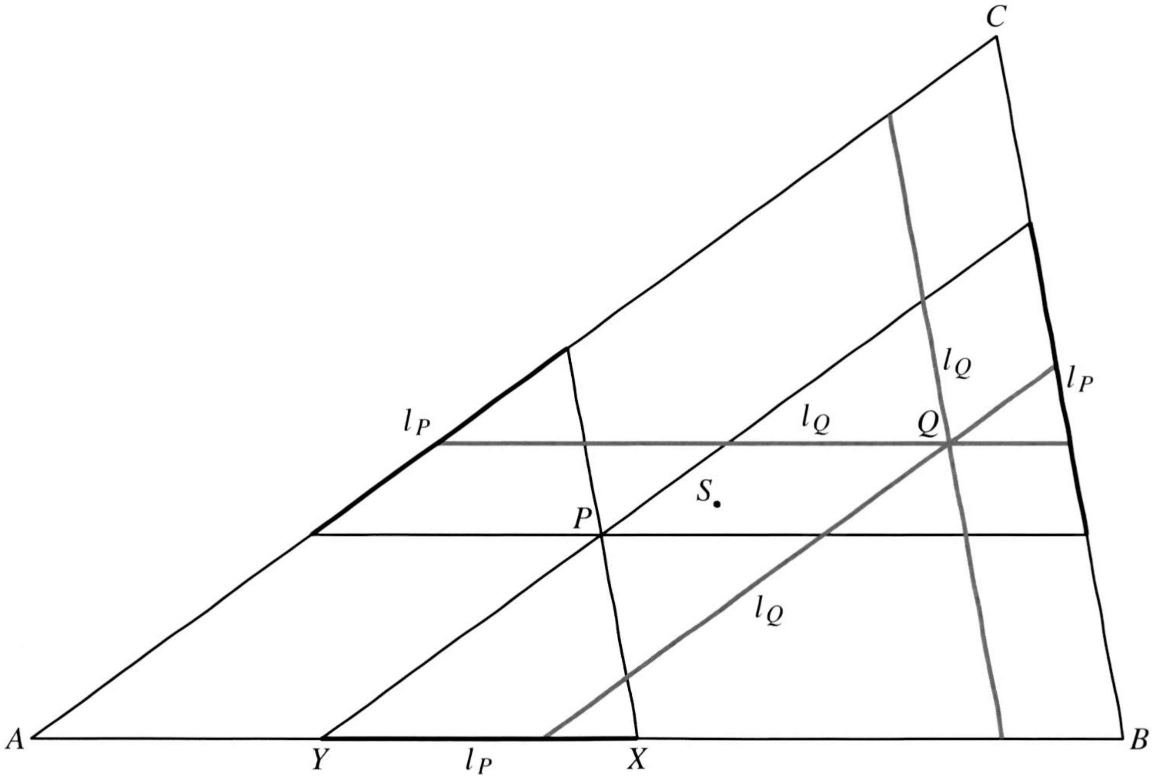
beschrieben. Für den Schnittpunkt X mit der Seite AB gilt $v_X = 1 - u_X$, $w_X = 0$. Die Parallele zu CA, sowie der Schnittpunkt Y mit AB sind analog

$$v = \frac{1}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)},\qquad u_Y = 1 - v_Y,\qquad w_Y = 0.$$

Der Abstand der beiden Schnittpunkte beträgt (siehe Figur)

$$l_P = (v_X - v_Y)c = \left(1 - \frac{1}{a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} - \frac{1}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\right)c = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Dieses Resultat ist invariant gegenüber dem Vertauschen von Seiten, deshalb werden auf allen Dreiecksseiten Strecken der gleichen Länge l_P ausgeschnitten.



b) Auch die baryzentrischen Koordinaten von Q werden normiert. Die Parallele zu BC durch Q ist festgelegt durch

$$u = \frac{-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Die Länge der darauf ausgeschnittenen Strecke ist proportional zu a

$$l_Q = (1-u)a = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = 2l_P.$$

Aufgabe 1325 (Die einfache dritte Aufgabe). Es sei A eine 3×3 schiefsymmetrische Matrix mit reellen Einträgen. Man bestimme den numerischen Wertevorrat

$$\mathfrak{W}(A) = \left\{x^* A x \mid x \in \mathbb{C}^3 \text{ und } x^* x = 1\right\},$$

wobei x^* die konjugierte Transponierte des Vektors x bezeichnet.

Dietrich Trenkler, Dortmund, D und Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 6 Leser haben Lösungen eingesandt: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Lösungsstrategien fallen in zwei Kategorien. Entweder wird auf das Vektor- und Spatprodukt zurückgegriffen oder es werden die Eigenwerte der Matrix A benutzt. Wir folgen *Christian Blatter*, der mit der ersten Methode arbeitet.

Mit dem Spaltenvektor $a = (a_{32}, a_{13}, a_{21})^T \in \mathbb{R}^3$ wird $Ax = a \times x$, wobei $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Es sei nun $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Dann hat man

$$z^* Az = \left(x^T - iy^T\right) A(x + iy) = (x - iy) \cdot (a \times (x + iy)) = 2i[a, y, x].$$

Hier lässt sich das Spatprodukt rechter Hand wie folgt abschätzen:

$$|[a, y, x]| \leq |a|\,|y|\,|x| \leq |a|\,\frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2\right) = \frac{|a|}{2},$$

und zwar gilt Gleichheit genau dann, wenn a, x, y paarweise orthogonal sowie x und y gleich lang sind.

Damit wird

$$\mathfrak{W}(A) = \{it \mid -|a| \leq t \leq |a|\}, \quad \text{wobei } |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,||A||.$$