Elem. Math. 64 (2009) 37 – 41
0013-6018/09/010037-5

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2009 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1263: Beweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\binom{2n}{n}(\sqrt{5}-2)^n = \frac{2}{15}\pi^2 - 3\ln^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Friedhelm Götze, Jena, D

Aufgabe 1264: Alle Zahlen der Form $2^\alpha \cdot 10^\beta$ mit nicht-negativen ganzen Exponenten α und β werden der Grösse nach geordnet. Die so definierte Folge (a_n) beginnt mit

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8,\ a_5 = 10,\ a_6 = 16,\ a_7 = 20, \ldots$$

Man bestimme den Index n von a_n als Funktion $n = f(\alpha, \beta)$, und für die Umkehrung $(\alpha, \beta) = f^{-1}(n)$ finde man einen einfachen Algorithmus.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Aufgabe 1265 (Die einfache dritte Aufgabe): Wir betrachten die (rechte) Endziffer der k-ten Potenzen der natürlichen Zahlen. Es sei

$$E(k) = \{e \mid \text{für ein } n \in \mathbb{N} \text{ endet die Dezimalzahl } n^k \text{ mit der Ziffer } e\}.$$

Man beweise für $k \in \mathbb{N}$ die Formel

$$E(k) = \begin{cases} \{0,1,5,6\} & \text{falls} \quad k \equiv 0 \pmod 4, \\ \{0,1,4,5,6,9\} & \text{falls} \quad k \equiv 2 \pmod 4, \\ \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} & \text{falls} \quad k \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2008

Aufgabe 1251. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ positive reelle Zahlen, welche der Bedingung

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

genügen. Beweise:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geq n \cdot a_1^{n-1} \cdot a_2^{n-1} \cdot \ldots \cdot a_n^{n-1}. \tag{1}$$

Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für Gleichheit in (1).

Bianca-Teodora Iordache, Craiova, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Lösungen eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BA), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Oleh Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D) und Walther Janous (Innsbruck, A).

Wir folgen *Walter Burgherr*: Das harmonische Mittel H der Zahlen ist kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel G:

$$H := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} =: G.$$

Daraus gewinnt man

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{G}. \tag{2}$$

Nach der verallgemeinerten Mittelungleichung ist das n-Mittel grösser oder gleich dem arithmetischen Mittel A:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =: A. \tag{3}$$

Nach Voraussetzung der Aufgabe gilt

$$n \cdot A \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right). \tag{4}$$

Setzt man diese Ungleichungen zusammen, so findet man

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{n}} &\overset{(3)}{\geq} A \overset{(4)}{\geq} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \\ &\overset{(2)}{\geq} \frac{G^n}{n} \cdot \frac{n}{G} = G^{n-1}.\end{aligned}$$

Durch Potenzieren mit n und anschliessendes Multiplizieren mit n ergibt sich die behauptete Ungleichung

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geq n \cdot G^{n(n-1)} = n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{n-1}\,.$$

In den verwendeten Ungleichungen (2) und (3) hat man genau dann Gleichheit, wenn alle an der Mittelbildung beteiligten Zahlen übereinstimmen: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n =: a$.

In diesem Fall hat man in (4) genau dann Gleichheit, wenn $n \cdot a = a^n \cdot \frac{n}{a}$, woraus wegen $n \geq 3$ die Bedingung $a = 1$ folgt.

Aufgabe 1252. Eine Verallgemeinerung der Fragestellung von Aufgabe 1241:
$f(\ell, n)$ bezeichne die Anzahl der Zahlen k $(1 \leq k \leq n)$, für welche die erste Dezimalziffer von 2^k gleich ℓ ist. Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\ell, n)}{n}$.

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. 8 Löser haben Zuschriften eingesandt: Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH).

In allen Lösungen wird der Satz von Hermann Weyl über die Gleichverteilung modulo 1 benützt; er besagt:

Es sei λ eine irrationale Zahl. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b \leq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n,\ a \leq \langle \lambda m \rangle \leq b\}}{n} = b - a\,.$$

Dabei bezeichnen $\#M$ die Anzahl Elemente der Menge M und $\langle x \rangle$ den gebrochenen Teil der reellen Zahl x, also $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ wie üblich die grösste ganze Zahl $\leq x$ ist.

Hans Heiner Storrer argumentiert nun wie folgt: Es sei $M(\ell, n)$ die Menge der natürlichen Zahlen m mit $1 \leq m \leq n$, für welche die erste Dezimalziffer von 2^m gleich ℓ ist. Für die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion f ist dann $f(\ell, n) = \#M(\ell, n)$. Wir setzen $\lambda = \lg(2)$, wobei mit lg der dekadische Logarithmus bezeichnet wird. Bekanntlich ist λ irrational, denn aus $\lg(2) = p/q,\ p, q \in \mathbb{N}$, würde $2 = 10^{p/q}$ und damit der Widerspruch $2^q = 10^p$ folgen.

Wir untersuchen nun, wann 2^m mit der Ziffer ℓ beginnt. Es ist

$$2^m = 10^{\lg(2^m)} = 10^{\lambda m} = 10^{\lfloor \lambda m \rfloor} \cdot 10^{\langle \lambda m \rangle},$$

wobei die Beziehung $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$ benutzt wurde. Nun ist $\lfloor \lambda m \rfloor \in \mathbb{N}$, und es gilt $1 \leq 10^{\langle \lambda m \rangle} < 10$, woraus folgt, dass die Anfangsziffer von 2^m gleich jener von $10^{\langle \lambda m \rangle}$ ist. Die Zahl $10^{\langle \lambda m \rangle}$ beginnt genau dann mit der Ziffer ℓ, wenn

$$\ell \leq 10^{\langle \lambda m \rangle} < \ell + 1,$$

also wenn

$$\lg(\ell) \leq \langle \lambda m \rangle < \lg(\ell + 1)$$

ist. Damit gilt

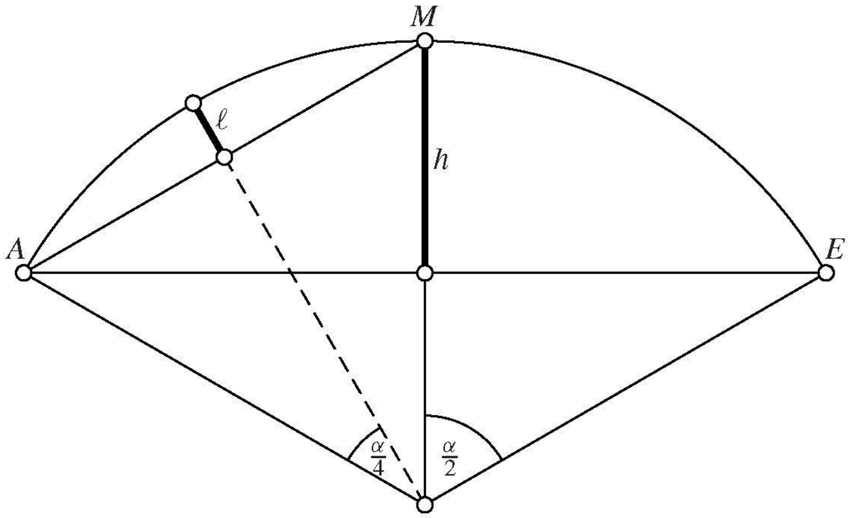
$$M(\ell, n) = \{m \mid 1 \leq m \leq n,\ \lg(\ell) \leq \langle \lambda m \rangle < \lg(\ell + 1)\}. \tag{1}$$

Wegen des Satzes von Weyl ist nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\ell, n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#M(\ell, n)}{n} = \lg(\ell + 1) - \lg(\ell) = \lg\left(1 + \frac{1}{\ell}\right).$$

(Dass es in (1) "$< \lg(\ell + 1)$" und nicht "$\leq \lg(\ell + 1)$" heisst, ist irrelevant.)

Aufgabe 1253 (Die einfache dritte Aufgabe). Im Strassenbau werden Kreisbogen bei grossem Radius oder bei im Gelände unerreichbarem Zentrum mit der sogenannten „Viertelsmethode“ abgesteckt. Der Ingenieur verpflockt Anfangspunkt A, Mittelpunkt M und Endpunkt E des Kreisbogens, und der Polier misst die Höhe h des gleichschenkligen Sehnendreiecks AME, um damit $\frac{h}{4}$ über den Mitten der neuen Sehnen AM bzw. ME senkrecht (nach aussen) „neue Kreispunkte“ abzustecken. (Mit den neuen Sehnen wird das Verfahren wiederholt, bis das Schnurpolygon die gewünschte Feinheit aufweist.) Wie gross ist beim ersten Verfahrensschritt der radiale Fehler in Abhängigkeit des Zentriwinkels α?



Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingegangen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Otto M. Keiser (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Herrliberg, CH), Hans Heiner Storrer (Greifensee, CH) und Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Fast alle Löser argumentieren wie *Otto M. Keiser*: Aus den offensichtlichen Beziehungen

$$h = r - r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2r\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

und

$$\ell = r - r\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 2r\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)$$

folgt für den relativen radialen Fehler

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{r} &= \frac{\left|\frac{h}{4} - \ell\right|}{r} = \left|\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right| = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\cdot\left|\cos^2\left(\frac{\alpha}{8}\right) - 1\right| \\ &= 2\sin^4\left(\frac{\alpha}{8}\right).\end{aligned}$$