# Betrachtungen zum Satz von Bernstein

Autor(en): **Meiringer, Markus**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **59 (2004)**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9311

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Elem. Math. 59 (2004) 65 – 77
0013-6018/04/020065-13
DOI 10.1007/s00017-003-0186-z

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Elemente der Mathematik

# Betrachtungen zum Satz von Bernstein

Markus Meiringer

Markus Meiringer, geboren 1969, studierte in Regensburg Mathematik und Physik. Nach dem Diplom in Mathematik, dem Staatsexamen in Mathematik und Physik und dem Studium der katholischen Religionslehre als Erweiterungsfach unterrichtet er seit 1999 am St.-Gotthard-Gymnasium der Benediktiner in Niederalteich.

## 1 Einleitung

Schon Georg Cantor wollte zeigen, dass zwei Mengen, von denen jede einer Teilmenge der anderen gleichmächtig ist, auch untereinander gleichmächtig sind. Oder anders formuliert: falls $|M| \leq |N|$ und $|M| \geq |N|$, gilt sogar $|M| = |N|$ für beliebige Mengen $M$ und $N$. Sein Schüler Felix Bernstein hat als 19jähriger im Jahre 1897 in Cantors Seminar in Halle einen ersten Beweis dieses Äquivalenzsatzes vorgetragen.

Der Beweis von Bernstein wurde 1898 leicht vereinfacht von Émile Borel im Anhang zu seiner „Vorlesung zur Funktionentheorie“ veröffentlicht („Leçons sur la théorie des fonctions“, Paris). Bernstein hingegen publizierte seinen Beweis erst 1905 in dem Artikel „Untersuchungen aus der Mengenlehre“ in den Mathematischen Annalen 61. Hierin erwähnt Bernstein auch, dass Cantor die Vermutung des Äquivalenzsatzes im Band 91 der „Zeitschrift für Philosophie“ geäußert hatte und dass ein weiterer Beweis von Ernst Schröder im Artikel „Über G. Cantorsche Sätze“ im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 5 (1896), zu finden ist. Dieser Beweis von Schröder erwies sich jedoch als fehlerhaft, was Korselt erst 1911 entdeckte („Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes“, Mathematische Annalen 70).

Auch Richard Dedekind beschäftigte sich mit dem Äquivalenzsatz und fand bereits 1887 einen Beweis, den er aber nie veröffentlichte. Ein Manuskript wurde zwischen Dedekinds Papieren gefunden (Dedekind 1932, Band III, S. 447–448). Erst 1906 wurde von

Sind $M$, $N$ Mengen, von denen jede einer Teilmenge der anderen gleichmächtig ist, so liefert der Satz von Bernstein die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen $M$ und $N$. Wie eine solche Abbildung in einer konkreten Situation auszusehen hat, ist dabei nicht offensichtlich. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird ein Beweis des Satzes von Bernstein gegeben. Im zweiten Teil wird dieser Beweis an Hand zweier Beispiele von Mengen $M = ]0, \infty[$, $N = ]0, 1[$ bzw. $M = \mathbb{N}$, $N = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und konkreter injektiver Abbildungen zwischen $M$ und $N$ explizit gemacht.

Ernst Zermelo der Beweis wiederentdeckt („Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", Mathematische Annalen 65).

Da viele Mathematiker am Beweis des von Cantor aufgestellten Satzes beteiligt waren, war die Namensfindung nicht einfach. Dedekind hat also als erster den Äquivalenzsatz bewiesen. Deshalb scheint es angemessen, den Satz nach „Dedekind-Bernstein" zu benennen. Jedoch hat sich im angelsächsischen und deutschen Raum die Bezeichnung „Theorem von Schröder-Bernstein" eingebürgert, während in Frankreich und Italien das Resultat als „Theorem von Cantor-Bernstein" bekannt ist. Jedenfalls wird Bernstein immer mit dem Theorem in Verbindung gebracht (vgl. hierzu auch [1, S. 15ff.] und [3, S. 99]).

Trotz seiner Bedeutung für die Mengenlehre findet das Theorem von Schröder-Bernstein im Unterricht der Gymnasien keine Anwendung, was sicherlich darauf zurückzuführen ist, dass von Mächtigkeiten von unendlichen Mengen nur selten gesprochen wird. Der Satz von Bernstein (so soll er hier kurz genannt werden – auch wenn dabei wichtige beteiligte Mathematiker unter den Tisch fallen) verwendet in einer anderen Formulierung, auf die wir uns hier beziehen, nicht die Mächtigkeiten, sondern er ist mit den Begriffen „injektiv" bzw. „bijektiv" formuliert. Jedoch werden diese im Unterricht ebenfalls selten erklärt. Häufig begnügt man sich damit, unter der Injektivität einer Funktion deren „Umkehrbarkeit" zu verstehen. Natürlich kann man den Zielbereich immer geeignet wählen (so dass die Funktion dann schon bijektiv ist), aber man verschweigt letztlich doch den genauen Abbildungsbegriff.

Eine Möglichkeit, die Begriffe injektiv, surjektiv oder bijektiv genauer zu besprechen, ist auch durch die Behandlung des Satzes von Bernstein in einer 11. Jahrgangsstufe gegeben. Dabei kann die Bildung des Wertebereichs einer Funktion geübt werden und Begriffe wie Abbildung oder Hintereinanderausführen von Funktionen (Verkettung) können wiederholt und vertieft werden. Nicht zuletzt werden den Schülern Fragestellungen der Mengenlehre näher gebracht. Die Gleichmächtigkeit von unendlichen Mengen (wie etwa $|]0;1[| = |\mathbb{R}|$) verwundert Schüler immer wieder. So können vom Satz von Bernstein ausgehend viele Aspekte der Mengenlehre mit den Schülern besprochen werden. Die nachfolgenden Überlegungen mögen hierzu zur Anregung dienen.

Auch aus diesem Grund wird in der folgenden Darstellung stets darauf geachtet, nicht nur die Existenz von Abbildungen zu betrachten. Es geht besonders darum „WIE" abgebildet wird und es soll mit den Abbildungen „gespielt" werden.

## 2 Der Satz von Bernstein

Im Folgenden soll ein Beweis des Satzes von Bernstein (nach [2]) angegeben werden. Dabei wird besonders auf die Konstruktion der im Satz geforderten Abbildung eingegangen. Im nächsten Abschnitt wird an einem konkreten Beispiel eine solche Abbildung bestimmt.

**Satz 2.1 (Bernstein)** *Es seien $X$, $Y$ Mengen und $f$, $g$ Abbildungen mit $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ injektiv. Dann gibt es eine bijektive Abbildung von $X$ nach $Y$.*

*Beweis.* Für jede Menge $E \subset X$ ist die Abbildung $f|_E : E \to f(E)$ bijektiv. Auf der Menge $Y \setminus f(E)$ ergibt sich nun die Abbildung $g|_{Y \setminus f(E)} : Y \setminus f(E) \to g(Y \setminus f(E))$, welche wiederum bijektiv ist. Es wäre nun das Ziel erreicht, wenn $X \setminus (g(Y \setminus f(E)))$ gerade die Menge $E$ wäre.

Zum Beweis des Satzes betrachtet man die folgende Abbildung $\varphi$ auf der Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) $\mathcal{P}(X)$ von $X$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X)\,, \\ & & E & \longmapsto & X \setminus g(Y \setminus f(E))\,. \end{array}$$

Man möchte nun eine Menge $B$ finden, für die

$$\varphi(B) = B$$

gilt, dann ist die Behauptung fast gezeigt.

Da $B = \varphi(B) = X \setminus g(Y \setminus f(B))$, ist ja wie gewünscht

$$X \setminus B = g(Y \setminus f(B))\,.$$

Somit kann man (wie oben angedeutet) eine bijektive Funktion $h$ wie folgt angeben:

$$\begin{array}{rccc} h & : & X & \longrightarrow & Y\,, \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B, \\ g^{-}(x) & \text{falls } x \notin B. \end{cases} \end{array}$$

Dabei ist $g^{-}$ ein Retrakt zur injektiven Abbildung $g$, d.h. für $x \in X \setminus B$ gibt es ein $y \in Y \setminus f(B)$ mit $g(y) = x$. Dieses $y$ wird mit $g^{-}(x)$ bezeichnet (siehe Fig. 1). □

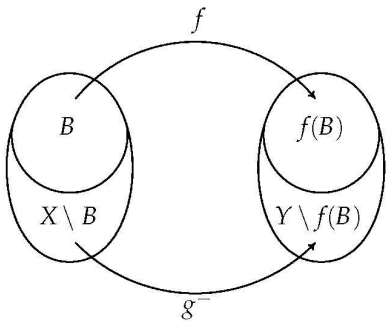


Fig. 1

Eine Menge $B$, die in obigem Zusammenhang $B = \varphi(B)$ erfüllt, wollen wir eine Bernsteinmenge der Funktionen $f$ und $g$ nennen (Reihenfolge der Funktionen ist wichtig!).

Für die Existenz einer Bernsteinmenge $B$ zeigt man zunächst:

**Lemma 2.2** *Falls $E \subset F$, so ist auch $\varphi(E) \subset \varphi(F)$.*

*Beweis.* Aus $E \subset F$ kann man $f(E) \subset f(F)$ schließen, woraus $Y \setminus f(E) \supset Y \setminus f(F)$ folgt. Wendet man nun $g$ an, ergibt sich $g(Y \setminus f(E)) \supset g(Y \setminus f(F))$ , was sodann zu $X \setminus g(Y \setminus f(E)) \subset X \setminus g(Y \setminus f(F))$ führt. Dies zeigt $\varphi(E) \subset \varphi(F)$. □

**Lemma 2.3** *Mit Hilfe der nicht-leeren Menge $\mathscr{E} = \{E \in \mathscr{P}(X) \mid E \subset \varphi(E)\}$ setzt man*

$$B := \bigcup_{E \in \mathscr{E}} E.$$

*Dann ist $B$ eine Bernsteinmenge.*

*Beweis.* Da nun als Folge von Lemma 2.2 für jedes $E \in \mathscr{E}$ die Inklusion $E \subset \varphi(E) \subset \varphi(B)$ besteht, ergibt sich die Inklusion $B \subset \varphi(B)$. Auf der anderen Seite gilt $\varphi(B) \subset \varphi(\varphi(B))$ und somit ist $\varphi(B) \in \mathscr{E}$, also $\varphi(B) \subset B$. Dies zeigt, dass $B$ eine Bernsteinmenge ist. Mit diesem $B$ erhält man die oben angegebene Bijektion. □

Es gibt die verschiedensten Beweise dieses Satzes (vgl. u.a. [3, S. 99], [1, S. 15] oder [4, S. 35]). Man unterscheidet hierbei im Wesentlichen zwei Arten. Einerseits gewinnt man die Bernsteinmenge, wie im Beweis gezeigt, durch Vereinigung bestimmter Mengen. Da bei dieser Methode, die auf Bernstein zurückgeht, die Elemente der Menge $\mathscr{E}$ vereinigt werden, nähert man sich anschaulich gesprochen mit immer größer werdenden Mengen oder „von unten her“ durch immer weitere Hinzunahme von Elementen von $\mathscr{E}$ einer Bernsteinmenge an. Entsprechend dieser Bildungsmethode wird im dritten Abschnitt eine Bernsteinmenge explizit konstruiert.

Andererseits kann ein Fixpunkt der Abbildung $\varphi$ (nichts anderes ist ja eine Bernsteinmenge) auch als Durchschnitt gewonnen werden (vgl. das oben erwähnte Manuskript von Dedekind). Man kann sich dabei das Vorgehen als eine Annäherung an die Bernsteinmenge mit immer kleiner werdenden Mengen oder „von oben her“ vorstellen.

Nun aber noch einige einfache Bemerkungen zu den Bernsteinmengen.

**Bemerkung 2.4** Eine Bernsteinmenge zu zwei Funktionen $f$ und $g$ ist nicht notwendig eindeutig bestimmt.

Es gilt aber:

**Lemma 2.5** *Die Bernsteinmenge $B := \bigcup_{E \in \mathscr{E}} E$ aus Lemma 2.3 ist maximal (bezüglich der Inklusion) und folglich eindeutig.*

*Beweis.* Wählt man für $f$ und $g$ jeweils die Identität $\mathrm{id}_X$, gilt für jedes $B \subset X$ die Gleichheit $\varphi(B) = X \setminus (X \setminus B) = B$, also ist jede Teilmenge von $X$ eine Bernsteinmenge und die Bemerkung ist gezeigt.

Eine beliebige Bernsteinmenge $B'$ ist nach Definition in der Menge $\mathscr{E}$ enthalten und somit ist $B' \subset \bigcup_{E \in \mathscr{E}} E = B$. Also ist auch jede maximale Bernsteinmenge $B_{\max}$ in der im Beweis konstruierten Bernsteinmenge $B$ enthalten. Damit muss $B = B_{\max}$ sein, sonst wäre $B_{\max}$ nicht maximal. Dies zeigt nun das Lemma. □

Es lässt sich auf entsprechende Weise (durch Bestimmung einer Bernsteinmenge $\widehat{B}$ von $g$ und $f$) auch eine Abbildung $\widehat{h}$ von $Y$ nach $X$ finden:

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{h} & : & Y & \longrightarrow & X, \\ & & y & \longmapsto & \begin{cases} g(y) & \text{falls } y \in \widehat{B}, \\ f^{-}(y) & \text{falls } y \notin \widehat{B}. \end{cases} \end{array}$$

**Lemma 2.6** *Es gilt:*

i) *Sind die beiden Mengen $B$ und $\widehat{B}$ maximal, so gilt $\widehat{h} \circ h(x) = x$ für $x \in X \setminus B$ und $h \circ \widehat{h}(y) = y$ für $y \in Y \setminus \widehat{B}$.*

ii) *Auch wenn die Mengen $B$ und $\widehat{B}$ maximal sind, muss nicht $\widehat{h} \circ h = \mathrm{id}_X$ bzw. $h \circ \widehat{h} = \mathrm{id}_Y$ gelten.*

*Beweis.* i) Da $B = X \setminus g(Y \setminus f(B))$, folgt $Y \setminus f(B) = Y \setminus f(X \setminus g(Y \setminus f(B)))$. Nun ist $Y \setminus f(B) \subset \widehat{B}$, weil $\widehat{B}$ maximal gewählt wurde.

Ist nun $x \notin B$, folgt $\widehat{h} \circ h(x) = \widehat{h} \circ g^{-}(x)$. Da $g^{-}(x) \in Y \setminus f(B) \subset \widehat{B}$, gilt $\widehat{h} \circ g^{-}(x) = g \circ g^{-}(x) = x$.

Analog folgt $X \setminus g(\widehat{B}) \subset B$ und damit $h \circ \widehat{h}(y) = y$ für $y \in Y \setminus \widehat{B}$.

ii) Betrachtet man die beiden Abbildungen

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & y & \longmapsto & 3y \end{array}$$

erhält man $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus g(\emptyset) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

Damit ist $B = \mathbb{R}$ (und analog $\widehat{B} = \mathbb{R}$) maximale Bernsteinmenge.

Es ergeben sich die Abbildungen $h$ und $\widehat{h}$ zu:

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{x}{3} & \text{falls } x \in \emptyset, \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{h} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & y & \longmapsto & \begin{cases} 3y & \text{falls } y \in \mathbb{R}, \\ \frac{y}{2} & \text{falls } y \in \emptyset. \end{cases} \end{array}$$

Es ist nun $h \circ \widehat{h}(1) = h(3) = 6 \neq 1$ und $\widehat{h} \circ h(1) = \widehat{h}(2) = 6 \neq 1$. □

Die geforderte Menge $B$ muss in einem konkreten Beispiel nicht auf die im Beweis benutzte (abstrakte) Weise bestimmt werden. Man kann sich z.B. für zwei injektive Funktionen ganz unbelastet und frischen Mutes auf die Suche nach einer geeigneten Menge $B$ machen.

## 3 Beispiele für die Verwendung von Bernsteinmengen

Es erscheint auf den ersten Blick nicht sehr lohnend zu sein, sich auf die Suche nach bijektiven Abbildungen von einem Intervall (offen oder abgeschlossen) der reellen Zahlen in ein anderes Intervall zu begeben, da bei nach oben und unten beschränkten Intervallen das Gewünschte schon durch affine Funktionen möglich ist:

$$\begin{array}{rccc} f & : & ]a;b[ & \longrightarrow & ]c;d[\,, \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{d-c}{b-a}\cdot x+\dfrac{bc-ad}{b-a}\,. \end{array}$$

Dabei gilt: $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ und $a<b$, $c<d$.

Außerdem kann man mit der Tangens- und der Arcustangensfunktion ebenfalls auf stetige Art und Weise Funktionen in unbeschränkte Intervalle und aus ihnen heraus angeben:

$$\begin{array}{rccc} t & : & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & ]-\infty;\infty[\,, \\ & & x & \longmapsto & \tan(x). \end{array}$$

Diese stetigen Funktionen sind sämtlich bijektiv und haben Umkehrfunktionen, die ebenfalls stetig sind. Man kann durch Komposition dieser Funktionen eine bijektive und stetige Funktion mit stetiger Umkehrung von $]a;b[$ nach $]c;d[$ konstruieren, wobei sogar $a,b,c,d\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;\infty\}$ gewählt werden kann.

In vielen Anwendungen genügt die Existenz einer bijektiven Abbildung, wie später zu sehen sein wird. Der Beweis des Theorems von Bernstein liefert aber mehr als nur die Existenz einer Bijektion. Man kann eine Bernsteinmenge $B$ suchen, die die Angabe einer Bijektion mit Hilfe der gegebenen Funktionen ermöglicht. Dies sei an einem expliziten Beispiel gezeigt. Die Hauptarbeit besteht darin, eine Bernsteinmenge $B$ zu bestimmen.

Die Konstruktion einer Bernsteinmenge durch die Vereinigung aller Elemente der Menge $\mathscr{E}$ ist nicht sofort einzusehen. Aber die Idee einer Annäherung an die Bernsteinmenge „von unten her“ führt auf den Gedanken, zu einer Menge $E$, die $E\subset\varphi(E)$ erfüllt, solange Elemente hinzuzufügen, bis $E=\varphi(E)$ gilt. Dazu folgt nun

**Eine explizite Konstruktion:** Gegeben seien die injektiven Funktionen

$$\begin{array}{rccc} f & : & ]0;\infty[ & \longrightarrow & ]0;1[\,, \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+2}\,, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g & : & ]0;1[ & \longrightarrow & ]0;\infty[\,, \\ & & y & \longmapsto & \dfrac{1}{y}\,. \end{array}$$

Es sollen mit Hilfe von Bernsteinmengen bijektive Abbildungen $h$ von $X=]0;\infty[$ nach $Y=]0;1[$ und $\widehat{h}$ in der anderen Richtung konstruiert werden.

Man benötigt zunächst eine „Startmenge“ mit $E\subset\varphi(E)$; dabei bezeichnet $\varphi$ wieder die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \mathscr{P}(X)\,, \\ & & E & \longmapsto & X\setminus g(Y\setminus f(E))\,. \end{array}$$

Da $g(Y) \supset g(Y \setminus f(B))$, gilt

$$E := X \setminus g(Y) \subset X \setminus g(Y \setminus f(E)) = \varphi(E)\,.$$

Im vorliegenden Fall ist $g(Y) = ]1;\infty[$ und somit $E = ]0;\infty[\setminus]1;\infty[ = ]0;1]$. Also ist $E$ eine geeignete „Startmenge“, da

$$\begin{aligned}\varphi(]0;1]) &= X \setminus g\left(Y \setminus \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\right) = X \setminus g\left(\left]0;\frac{1}{3}\right[ \cup \left[\frac{1}{2};1\right[\right)\\ &= X \setminus (]1;2] \cup ]3;\infty[) = ]0;1] \cup ]2;3]\,.\end{aligned}$$

Also muss auch $]0;1] \cup ]2;3]$ in der Bernsteinmenge enthalten sein, also weiter:

$$\begin{aligned}\varphi(]0;1] \cup ]2;3]) &= X \setminus g\left(Y \setminus \left(\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right[ \cup \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\right)\right)\\ &= X \setminus g\left(\left]0;\frac{1}{5}\right[ \cup \left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right[ \cup \left[\frac{1}{2};1\right[\right)\\ &= X \setminus (]1;2] \cup ]3;4] \cup ]5;\infty[) = ]0;1] \cup ]2;3] \cup ]4;5]\,.\end{aligned}$$

Es drängt sich die Vermutung auf, dass eine Bernsteinmenge von $f$ und $g$ folgende Gestalt hat:

$$B = ]0;1] \cup ]2;3] \cup ]4;5] \cup ]6;7] \cup \cdots = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]2n;2n+1]\,.$$

In der Tat ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varphi(B) &= \varphi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} ]2n;2n+1]\right) = X \setminus g\left(Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1};\frac{1}{2n}\right[\right)\\ &= X \setminus g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n};\frac{1}{2n-1}\right[\right) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} ]2n-1;2n]\\ &= ]0;1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ]2n;2n+1] = \bigcup_{n=0}^{\infty} ]2n;2n+1] = B\,.\end{aligned}$$

Es wird noch gezeigt, dass $B$ sogar eine maximale Bernsteinmenge ist. Dazu nimmt man an, es gäbe eine Bernsteinmenge $B' \not\subset B$. Es bezeichne $n_0$ die kleinste natürliche Zahl mit $B' \cap ]2n_0+1;2n_0+2] \neq \emptyset$.

Da

$$\begin{aligned}\varphi(]2n_0+1;2n_0+2]) &= X \setminus g(X \setminus f(]2n_0+1;2n_0+2]))\\ &= X \setminus g\left(Y \setminus \left[\frac{1}{2n_0+4};\frac{1}{2n_0+3}\right[\right)\\ &= X \setminus g\left(\left]0;\frac{1}{2n_0+4}\right[ \cup \left[\frac{1}{2n_0+3};1\right[\right)\\ &= X \setminus (]1;2n_0+3] \cup ]2n_0+4;\infty[) = ]0;1] \cup ]2n_0+3;2n_0+4],\end{aligned}$$

kann $B' \cap ]2n_0+1; 2n_0+2]$ nicht in $\varphi(B')$ enthalten sein, also kann $B'$ keine Bernsteinmenge sein.

Damit ist jedenfalls ein gewünschtes $B$ gefunden und die bijektive Abbildung wird auf folgende Art festgelegt:

$$\begin{array}{rcll} h & : & X & \longrightarrow & Y\,, \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{falls } x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} ]2n; 2n+1], \\ \frac{1}{x} & \text{falls } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} ]2n-1; 2n]. \end{cases} \end{array}$$

Der Retrakt von $g : y \mapsto \frac{1}{y}$ ist $g^- : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Der Graph dieser Funktion hat unendlich viele Sprungstellen (Fig. 2).

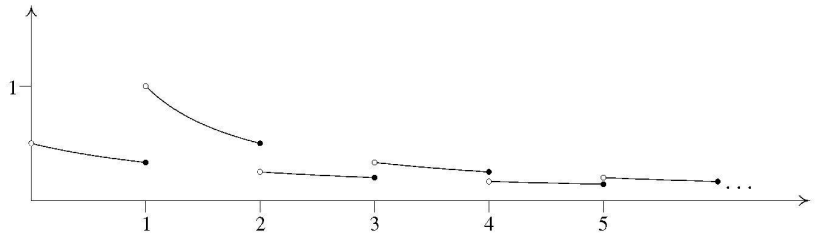


Fig. 2

Um eine bijektive Abbildung $\widehat{h}$ in der anderen Richtung zu konstruieren, betrachtet man

$$\begin{array}{rcll} \widehat{\varphi} & : & \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y)\,, \\ & & F & \longmapsto & Y \setminus f(X \setminus g(F)) \end{array}$$

und sucht eine Menge $\widehat{B}$ mit $\widehat{\varphi}(\widehat{B}) = \widehat{B}$.

Wir starten zuerst wieder mit $Y \setminus f(X) = ]0;1[ \setminus ]0; \frac{1}{2}[ = [\frac{1}{2}; 1[$ und erhalten:

$$\widehat{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2};1\right[\right) = Y \setminus f\left(X \setminus g\left(\left[\frac{1}{2};1\right[\right)\right) = Y \setminus f(]0;1] \cup ]2;\infty[) = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right[ \cup \left[\frac{1}{2};1\right[\,.$$

Die gesammelte Erfahrung lässt uns nun vermuten, dass

$$\widehat{B} = \cdots \cup \left[\frac{1}{8};\frac{1}{7}\right[ \cup \left[\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right[ \cup \left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right[ \cup \left[\frac{1}{2};1\right[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n};\frac{1}{2n-1}\right[$$

die Bernsteinmenge von $g$ und $f$ ist, was wie oben durch entsprechendes Nachrechnen von $\widehat{\varphi}(\widehat{B}) = \widehat{B}$ sofort klar ist.

Abermals kann man leicht zeigen, dass $\widehat{B}$ die maximale Bernsteinmenge ist.

Nun kann man auch die gewünschte Bijektion angeben:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{h} \;:\; Y & \longrightarrow & X\,, \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{falls } y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}; \frac{1}{2n-1}[, \\ \frac{1}{y} - 2 & \text{falls } y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n+1}; \frac{1}{2n}[. \end{cases} \end{array}$$

Wieder hat der Graph unendlich viele Sprungstellen (Fig. 3).

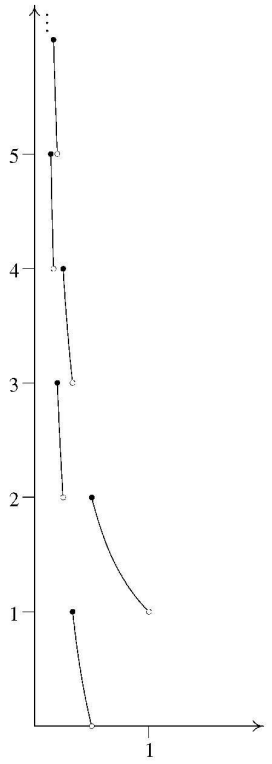


Fig. 3

Wie oben in Lemma 2.6 erwähnt, gilt hier lediglich $\widehat{h} \circ h(x) = x$ für $x \in X \setminus B$ und $h \circ \widehat{h}(y) = y$ für $y \in Y \setminus \widehat{B}$. Beim vorliegenden Beispiel sind jedoch $h$ und $\widehat{h}$ invers zueinander, was man leicht durch Vergleich (Spiegelung an der Winkelhalbierenden) der Graphen erkennt.

## 4 Der Satz von Cantor

Bekannterweise gibt es eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diese liefert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$, oder anders gesagt: Es gibt „genauso viele“ natürliche wie rationale Zahlen.

Zum Beweis betrachtet man meist folgendes Diagramm:

| 1. | 2. | 3. | 4. | Diagonale |
|---|---|---|---|---|
| $(1;1)$ | $(2;1)$ | $(3;1)$ | $(4;1)$ | $\cdots$ |
| | $\swarrow$ | $\swarrow$ | $\swarrow$ | |
| $(1;2)$ | $(2;2)$ | $(3;2)$ | $(4;2)$ | $\cdots$ |
| | $\swarrow$ | $\swarrow$ | | |
| $(1;3)$ | $(2;3)$ | $(3;3)$ | $(4;3)$ | $\cdots$ |
| | $\swarrow$ | | | |
| $(1;4)$ | $(2;4)$ | $(3;4)$ | $(4;4)$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\ddots$ |

Die Diagonalen $\{(k_1;k_2) \mid k_1 + k_2 = k + 1;\ k = 1;2;\ldots\}$ werden nacheinander von oben nach unten durchlaufen. Die Paare können auf diese Weise mit den natürlichen Zahlen „durchnummeriert“ werden.

Klar ist nun, dass es eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, da jeder natürlichen Zahl ein Tupel natürlicher Zahlen zugeordnet wird und umgekehrt. Dies lässt sich auch in Form von Abbildungsvorschriften genauer angeben. Aber wie findet man zu einer natürlichen Zahl $n$ das ihr entsprechende Tupel?

Nach dem Durchlauf der $s$-ten Diagonale sind bereits die ersten $1 + 2 + 3 + \cdots + s = \frac{s(s+1)}{2}$ natürlichen Zahlen „verbraucht“. Es verbleiben somit $n - \frac{s(s+1)}{2}$ zur Befüllung der folgenden Diagonalen. Es ist also das größte natürliche $s$ mit der Eigenschaft

$$\frac{s(s+1)}{2} < n$$

gesucht. Die quadratische Gleichung $s^2 + s - 2n = 0$ hat die reellen Lösungen $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1+8n})$ und $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+8n})$. Die erste scheidet aus, da sie negativ ist; mit Hilfe der zweiten Lösung erhält man als größte ganzzahlige Lösung obiger Ungleichung

$$s = \left\lceil \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+8n}) - 1 \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{4} + 2n} - \frac{3}{2} \right\rceil .$$

Dabei bezeichnet man mit $\lceil x \rceil$ für $x \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x$ ist.

Nach diesen $s$ Diagonalen wird begonnen, die $(s+1)$-te aufzufüllen, für die dann noch $n - \frac{s(s+1)}{2} = n - \frac{\left\lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} - \frac{3}{2} \right\rceil \left( \left\lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} - \frac{3}{2} \right\rceil + 1 \right)}{2}$ Zahlen zum Besetzen verbleiben.

Auch in der anderen Richtung findet sich sehr leicht die Abbildung, die dieses Abzählungsverfahren beschreibt, und es ergibt sich somit der

**Satz 4.1** *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \nu \quad : \quad \mathbb{N} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\ n \quad &\longmapsto \quad \left( \frac{\lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} - \frac{1}{2} \rceil \lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} + \frac{1}{2} \rceil}{2} - n + 1; n - \frac{\lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} - \frac{3}{2} \rceil \lceil \sqrt{\frac{1}{4}+2n} - \frac{1}{2} \rceil}{2} \right), \\ \overline{\nu} \quad : \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{N}, \\ (k_1; k_2) \quad &\longmapsto \quad \frac{(k_1 + k_2 - 1)(k_1 + k_2)}{2} - k_1 + 1 \end{aligned}$$

*sind bijektiv und invers zueinander.*

*Beweis.* Nachrechnen, dass $\nu \circ \overline{\nu} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ und $\overline{\nu} \circ \nu = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. □

Es lässt sich aber auch ein sehr kurzer Beweis des Satzes von Cantor mit Hilfe des Satzes von Bernstein führen:

**Satz 4.2 (Cantor)** *Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen* $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *oder kurz:*

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| .$$

*Beweis.* Man betrachtet die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{N}, \\ (n; m) \quad &\longmapsto \quad 2^n \cdot 3^m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g \quad : \quad \mathbb{N} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\ n \quad &\longmapsto \quad (n; 1) . \end{aligned}$$

Als Inklusion ist die Injektivität von $g$ klar und wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist auch $f$ injektiv. Nach Bernstein gibt es also eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$. □

Leider informiert dieser Beweis nicht darüber, wie die Bijektion von $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $Y = \mathbb{N}$ abbildet. Zum Abschluss soll die Abbildung, deren Existenz nach Bernstein sofort klar ist, noch hinsichtlich ihrer Abbildungsvorschrift untersucht werden.

Wir beginnen wieder mit unseren Überlegungen zur Bestimmung einer Bernsteinmenge:

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus g(\mathbb{N}) = \{(n; m) \mid n \in \mathbb{N};\ m > 1\} , \\ \varphi(B_1) &= X \setminus g(Y \setminus f(B_1)) \\ &= X \setminus g(Y \setminus \{2^n 3^m \mid n \in \mathbb{N};\ m > 1\}) \\ &= X \setminus g(\{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 2^n 3^m \ \text{ mit } \ n \in \mathbb{N};\ m > 1\}) \\ &= X \setminus \{(x; 1) \mid x \neq 2^n 3^m \ \text{ mit } \ n \in \mathbb{N};\ m > 1\} \\ &= \{(n; m) \mid n \in \mathbb{N};\ m > 1\} \cup \{(x; 1) \mid x = 2^n 3^m \cdot 3 \ \text{ mit } \ n, m \in \mathbb{N}\} =: B_2 . \end{aligned}$$

Für $\varphi(B_2)$ ergibt sich

$$\{(n;m) \mid n \in \mathbb{N}; m > 1\} \cup \{(x;1) \mid x = 2^n 3^m \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\} \cup \left\{(x;1) \mid x = 8^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Es drängt sich die Vermutung auf, dass

$$B = \{(n;m) \mid n \in \mathbb{N}; m > 1\} \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{(x;1) \mid x = \left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dabei möge $\left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{0-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m}$ lediglich $2^n 3^m$ bedeuten. Nun zur Berechnung:

$$\varphi(B) = X \setminus g\left(Y \setminus \{2^n 3^m \mid n \in \mathbb{N};\ m > 1\} \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{2^{\left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

$$= X \setminus g\left(\left\{x \mid x \neq 2^n 3^m \text{ mit } n \in \mathbb{N};\ m > 1 \vee \bigvee_{i=0}^{\infty} x \neq \left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i+1-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

$$= X \setminus \left\{(x,1) \mid x \neq 2^n 3^m \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N} \vee \bigvee_{i=1}^{\infty} x \neq \left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= X \setminus \left\{(x,1) \mid \bigvee_{i=0}^{\infty} x \neq \left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\right\} = B\,.$$

Also ergibt sich als Bijektion:

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}, \\ & & (n,m) & \longmapsto & \begin{cases} 2^n 3^m & \text{falls } (n,m) \in B, \\ n & \text{falls } (n,m) \notin B. \end{cases} \end{array}$$

Um eine Bijektion $\widehat{h}$ in der anderen Richtung zu erhalten, ist eine geeignete Bernsteinmenge $\widehat{B}$ zu suchen. Man kann nachrechnen, dass die Menge

$$\widehat{B} = \left\{x \mid x \neq \left(\underbrace{8^{8^{\cdots^8}}}_{i-\text{mal}}\right)^{2^n 3^m} \cdot 3 \text{ mit } n, m \in \mathbb{N};\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$$

die gewünschte Eigenschaft hat.

Es ist doch überraschend, wie kompliziert es sein kann, eine Abbildung, deren Existenz theoretisch schnell nachzuweisen ist, explizit anzugeben. Schon bei den beiden injektiven Hyperbelstücken war es nicht offensichtlich, wie die Bernsteinmenge und somit die Bijektion aussehen soll. Und bei der Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird die Rechnung ziemlich aufwendig. Man sieht, wie viel Rechenarbeit eine gute Theorie spart. Das kann man aber nur in rechter Weise würdigen, wenn man die explizite Rechnung wirklich durchgeführt hat.

Abschließender Dank gilt den Herren Prof. Dr. G. Pickert, Dr. U. Riegel und StD J. Rung für etliche Vorschläge und Hinweise.

**Literatur**

[1] Kertész, A.: *Einführung in die transfinite Algebra.* Dt. Verl. der Wiss., Berlin 1975.

[2] Knorr, K.: *Lineare Algebra* II. Vorlesungsmitschrift, Regensburg SS 1991.

[3] Potter, M.D.: *Mengentheorie.* Spektrum, Heidelberg 1994.

[4] Scheja, G.; Storch, U.: *Algebra* I. Teubner, Stuttgart 1988.

Markus Meiringer
Mauritiushof 1
D–94557 Niederalteich, Deutschland