Elem. Math. 57 (2002) 80 – 85
0013-6018/02/020080-6 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1181: Im ebenen Gitter betrachten wir rote und blaue minimale Gitterwege; die roten Wege verbinden den Punkt $(0, m)$ mit dem Punkt $(n, 0)$, die blauen führen von $(0, 0)$ nach (n, m). Unter diesen Wegpaaren gibt es solche, die sich in einem Punkt der Geraden $y = k$ rechtwinklig kreuzen und bei denen der rote Weg diesen Punkt horizontal passiert. Berechne – in Abhängigkeit von n und m – die Anzahl dieser Wege für $k = 1$ und für $k = 2$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1182: Man finde einen (möglichst einfachen) Algorithmus, welcher entscheidet, ob sich zwei durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gegebene Strecken schneiden.

Albert Fässler, Evilard, CH

1183 (Die einfache dritte Aufgabe): Wir betrachten d–stellige Zahlen mit lauter gleichen Ziffern $\delta \neq 0$. Beispielsweise hat man für $\delta = 7$ und $d = 8$ die Zahl 77777777. Wir teilen die Differenz aus einer solchen Zahl und ihrer Quersumme durch $9 \cdot \delta$:

$$\frac{777777777 - 63}{9 \cdot 7} \qquad \frac{6666666 - 42}{9 \cdot 6}$$
$$\frac{222 - 6}{9 \cdot 2} \qquad \frac{55555 - 25}{9 \cdot 5}$$

Man drücke das Ergebnis dieser Division durch d und δ aus und betrachte insbesondere den Fall $d > 10$.

Uwe Hassler, Berlin, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2001

Aufgabe 1168. Zwei Spieler A und B werfen eine $(0,1)$-Laplace-Münze. Spieler A gewinnt, wenn 000 auftritt, Spieler B gewinnt, wenn 010 auftritt.

a) Es wird solange gespielt, bis ein Sieger feststeht. Wie verhalten sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B?

Es wird nun zusätzlich vereinbart, dass das Spiel nur gültig ist, wenn es genau beim n–ten Wurf ($n \geq 3$) zu Ende ist; andernfalls muss es wiederholt werden.

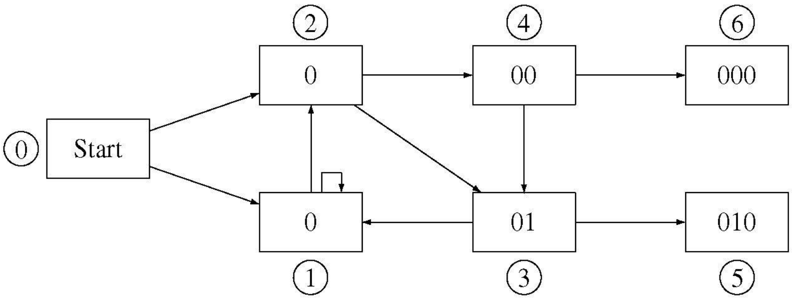
b) Wohin strebt das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B für wachsendes n?

Fritz Siegerist, Meilen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen oder Teillösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Peter Hohler (Aarburg, CH), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen bei a) den Überlegungen von *Roland Wyss*; die Lösung von b) wurde aus den Einsendungen von *Hans Egli* und *Joachim Klose* kombiniert.

Das Diagramm zeigt die sieben möglichen (von 0 bis 6 numerierten) Spielzustände; die Übergangswahrscheinlichkeiten in Pfeilrichtung betragen $1/2$.



Bezeichnet p_i die Wahrscheinlichkeit, dass man vom Zustand i in einen der absorbierenden Zustände 5 oder 6 gelangt, so folgen aus der Tatsache, dass die zu inneren Zuständen gehörigen Wahrscheinlichkeiten gleich dem gewichteten Mittel der Wahrscheinlichkeiten der Nachbarzustände sind, die Gleichungen

$$\left| \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\cdot p_1 + \frac{1}{2}\cdot p_2 \\ p_2 &= \frac{1}{2}\cdot p_3 + \frac{1}{2}\cdot p_4 \\ p_3 &= \frac{1}{2}\cdot p_1 + \frac{1}{2}\cdot p_5 \\ p_4 &= \frac{1}{2}\cdot p_3 + \frac{1}{2}\cdot p_6 \end{aligned} \right| .$$

Gewinnt A, so ist der Zustand 6 absorbierend; es gilt $p_5 = 0$ und $p_6 = 1$, und das System hat die Lösung $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, und es ist $p_0 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 = \frac{2}{5}$. Gewinnt B, so gilt $p_5 = 1$ und $p_6 = 0$, was zur Lösung $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ führt, woraus sich $p_0 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 = \frac{3}{5}$ ergibt. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten von A und B verhalten sich also 2:3.

Es seien a_n resp. b_n die Mächtigkeiten der Mengen A_n und B_n der Folgen, welche A resp. B nach genau n Würfen zum Sieg verhelfen. Wir konstruieren zwei Abbildungen $\varphi : A_n \cup A_{n-1} \to B_n$ und $\psi : B_{n-3} \cup A_{n-1} \to A_n$:

- Die Abbildung φ ersetzt bei den Folgen aus A_n den Schluss 00 durch 10, bei den Folgen aus A_{n-1} wird die hinterste 0 durch 10 ersetzt.
- Die Abbildung ψ ersetzt bei den Folgen aus B_{n-3} die hinterste 0 durch 1000, bei den Folgen aus A_{n-1} wird der Block 000 durch 1000 ersetzt.

Man erkennt, dass es sich bei φ und ψ um Bijektionen handelt, und dies gibt Anlass zu den Zusammenhängen

$$b_n = a_n + a_{n-1} \qquad (n \geq 4), \tag{1}$$

$$a_n = b_{n-3} + a_{n-1} \qquad (n \geq 6). \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben zusammen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} \qquad (n \geq 7). \tag{3}$$

Verwendet man (1) und (3) zusammen mit den Anfangswerten $a_1 = b_1 = 0, a_2 = b_2 = 0$, $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 = 1$, $b_4 = 2$ und berücksichtigt man noch, dass die Formeln (2) und (3) schon für $n \geq 5$ gelten, so sieht man nach kurzer Rechnung in den Daten

$$\begin{array}{rl} a_4 : b_4 = 1 : 2 & a_5 : b_5 = 1 : 2 \\ a_6 : b_6 = 2 : 3 & a_7 : b_7 = 4 : 6 = 2 : 3 \\ a_8 : b_8 = 6 : 10 = 3 : 5 & a_9 : b_9 = 9 : 15 = 3 : 5 \\ a_{10} : b_{10} = 15 : 24 = 5 : 8 & a_{11} : b_{11} = 25 : 40 = 5 : 8 \end{array}$$

unverkennbar den Anfang einer „doppelten Fibonaccifolge". Ist nämlich $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ für $n \geq 2$, so gilt

$$a_n = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]}, \qquad b_n = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]+1},$$

was sich für $n = 1, 2, 3, 4$ unmittelbar überprüfen lässt. Setzen wir nun diese verankerten Werte auf der rechten Seite von (3) ein, so ergibt sich vorerst

$$\begin{aligned} a_n &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-3}{2}]} + f_{[\frac{n-5}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-4}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n-3}{2}]} + f_{[\frac{n-5}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n-2}{2}]} + f_{[\frac{n-4}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]} \end{aligned}$$

und dann mit (1)

$$\begin{aligned} b_n &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]} + f_{[\frac{n-2}{2}]} \cdot f_{[\frac{n-1}{2}]} \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot (f_{[\frac{n}{2}]} + f_{[\frac{n-2}{2}]}) \\ &= f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n+2}{2}]} = f_{[\frac{n-1}{2}]} \cdot f_{[\frac{n}{2}]+1}. \end{aligned}$$

Das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler A und B beträgt somit

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{f_{[\frac{n}{2}]}}{f_{[\frac{n}{2}]+1}},$$

und dieser Quotient strebt bekanntlich für $n \to \infty$ gegen $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Aufgabe 1169. Es sei $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Beweise die Ungleichung

$$\left(\frac{2+\cos(x)}{3}\right)^3 < \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.$$

Péter Ivády, Budapest, H

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingetroffen: Erhard Braune (Linz, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Patrik Hubschmid (Spiegel, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee–Wai Lau (Hong Kong, China), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz–Jürgen Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender studieren Monotonieeigenschaften der aus der linken und der rechten Seite der Ungleichung gebildeten Differenzfunktion. *Michael Vowe* geht aus von den bekannten Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \iff \frac{2+\cos(x)}{3} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}, \\ &\frac{\sin(x)}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}. \end{aligned}$$

Die vorgelegte Ungleichung ist bewiesen, wenn die Gültigkeit von

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72}\right)^3 > 0$$

nachgewiesen werden kann. Die linke Seite lässt sich umformen in

$$\frac{x^2(12-x^2)(((x^2-6)^2+72)^2-6480)}{373248}.$$

Weil die kleinste positive Nullstelle dieses Ausdruckes grösser als $\pi/2$ ist, liefert der Ausdruck im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nur positive Werte.

Aufgabe 1170 (Die einfache dritte Aufgabe). Es sei f ein kubisches Polynom mit den Nullstellen a, b und c $(a \neq b)$, und es sei $m = (a+b)/2$. Das Newtonverfahren findet mit dem Startwert m die Lösung c der Gleichung $f(x) = 0$ in einem Schritt.

a) Man finde eine Verallgemeinerung auf Polynome vierten Grades.

b) Es sei g eine beliebige (genügend oft differenzierbare) Funktion. Welche Bedingung über m und g garantiert, dass das Newtonverfahren mit dem Startwert m in einem Schritt eine Lösung der Gleichung $g(x) = 0$ findet?

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Zuschriften eingegangen: Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Frieder Grupp argumentiert wie folgt: Es sei $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_1) = 0$. Gesucht ist $m \neq x_1$ mit $g(m) \neq 0$, so dass

$$x_1 = m - \frac{g(m)}{g'(m)}, \qquad g'(m) \neq 0. \tag{1}$$

Nach Voraussetzung existiert eine genügend oft differenzierbare Funktion h mit

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - x_1) \cdot h(x)\,, \\ g'(x) &= (x - x_1) \cdot h'(x) + h(x)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Also ist (1) äquivalent zu

$$x_1 - m = -\frac{(m - x_1) \cdot h(m)}{(m - x_1) \cdot h'(m) + h(m)}, \qquad g'(m) \neq 0\,, \tag{3}$$

was wegen $x_1 \neq m$ auf

$$h'(m) = 0, \qquad h(m) \neq 0 \tag{4}$$

führt. Werte m, die (4) erfüllen, könnten allerdings bereits mit x_1 übereinstimmen, so dass also 0 Newtonschritte benötigt werden.

In der Aufgabenstellung ist $h(x) = (x-a)(x-b)$. Der einzige Wert m mit $h'(m) = 0$ ist $m = (a+b)/2$, und für ihn ist wegen $a \neq b$ die Bedingung $h(m) = -(a-b)^2/4 \neq 0$ erfüllt (aber er könnte bereits mit c übereinstimmen).

Zur Lösung von Aufgabe a) betrachten wir $g(x) = A \cdot (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Es sei $h(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)$. Die Bedingung $h'(m) = 0$ führt auf die Gleichung

$$3m^2 - 2(a+b+c)m + (ab+ac+bc) = 0,$$

welche die beiden Lösungen

$$m_{1,2} = \frac{1}{3}\left(a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}\right)$$

besitzt. Es soll jetzt noch $h(m) \neq 0$ gelten (sonst hat man eine der Nullstellen a, b oder c erhalten oder man braucht 0 Newtonschritte). Ist $a = b \neq c$, so erweist sich $m_1 = (a+2c)/3$ als einziger möglicher Wert, und im Fall $a = b = c$ gibt es keine solche Zahl. Sind a, b und c paarweise verschieden, ist es ebenfalls möglich, dass einer der Werte m_1 oder m_2 bereits mit der vierten Nullstelle von g übereinstimmt. Die Werte für $m_{1,2}$ sind ja unabhängig von der vierten Nullstelle des Polynoms, und man kann deshalb bei einmal berechnetem $m_{1,2}$ das Polynom $(x-a)(x-b)(x-c)(x-m_1)$ wählen, bei welchem dann nur der Wert m_2 als Startwert in Frage kommt.