Mannigfaltige Geometrien

Autor(en): **Geiges, Hansjörg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **52 (1997)**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-2664

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 93 – 107
0013-6018/97/030093-15 $1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Mannigfaltige Geometrien

Hansjörg Geiges

Dem Andenken an meinen Vater Leif Geiges (1915–1990) gewidmet.

Hansjörg Geiges wurde 1966 in Basel als Sohn des Fotografen Leif Geiges und Urenkel des Freiburger Künstlers Fritz Geiges geboren, dessen Glasfenster und Mosaike die bedeutendsten Kathedralen Deutschlands, wie die Dome von Köln und Trier und das Freiburger Münster, schmücken. Er studierte an den Universitäten Göttingen, Cambridge, Zürich und Bonn. Nach der Promotion 1992 in Cambridge bei C.B. Thomas war er zwei Jahre als Szegő Assistant Professor an der Stanford University tätig. Danach verbrachte er ein akademisches Jahr als Research Fellow am Queens' College der University of Cambridge, und seit 1995 ist er Assistenz-Professor an der ETH Zürich. Seine Forschungsinteressen liegen in der Kontaktgeometrie und der geometrischen Topologie. Seiner Mutter verdankt er die Schweizer und seinem Vater die deutsche Staatsbürgerschaft, aber wie dieser fühlt er sich zuallererst als Alemanne und Europäer.

Wenn wir kein Verhältnis zur Geometrie haben,
haben wir kein Weltverständnis

Thomas Bernhard

1 Einleitung

Das erstmalige Aufstellen der These, die Erde sei eine Kugel, wird traditionell Parmenides von Elea (um 500 v.Chr.) zugeschrieben. Als sicher kann gelten, daß diese Kugelgestalt die Schulmeinung der Pythagoräer darstellte und zur Zeit des Aristoteles (384–322 v.Chr.) unter den griechischen Philosophen als offensichtliche Tatsache akzeptiert wurde. Zu dieser Entdeckung gelangte man allerdings nicht durch geometrische Beobachtungen auf der Erde, sondern über das Studium der Veränderungen am Nachthimmel und im Gang der Sonne in Abhängigkeit von der geographischen Position des Beobachters, genauer: der geographischen Breite. Tatsächlich ließen sich viele dieser Veränderungen auch mit einer zylindrischen Erdgestalt erklären, wie dies etwa von Anaximander (ca. 610–540 v.Chr.) vorgeschlagen wurde. Von Aristoteles wurde weiter die Kreisförmigkeit des Erdschattens bei Mondfinsternissen als Indiz für die Kugelgestalt der Erde vorgebracht; auch diese Argumentation beruht also auf einer Beobachtung im dreidimensionalen Raum und ist noch dazu unschlüssig.

In der Tat ist es nicht verwunderlich, daß es nicht Beobachtungen auf der Erde selbst waren, die zur Entdeckung ihrer Kugelgestalt führten. Denn die Oberfläche einer Kugel

Die geometrischen Vorstellungen über den Raum, in dem wir leben, werden durch die direkt zugänglichen *lokalen* Gegebenheiten geprägt. Erkenntnisse, die darüber hinausgehen und die *globale* Geometrie betreffen, liegen in aller Regel wesentlich tiefer, denn nicht selten scheinen sie der naiven (eben lokalen!) Sicht der Dinge zu widersprechen. So setzte sich seinerzeit selbst in der Wissenschaft die Erkenntnis, dass wir auf der Oberfläche einer Kugel leben, gegen die lokale ebene Erfahrung nur mühsam durch. In jenem Erkenntnisschritt spielte die Mathematik ohne Zweifel eine massgebliche Rolle. Als abstrakte Wissenschaft kann sich die Mathematik anschliessend die Frage vorlegen, ob neben der Kugeloberfläche noch andere geschlossene Flächen existieren, die lokal wie ein Ebenenstück aussehen, denn solche Flächen sind prinzipiell mit unserer lokalen Erfahrung vereinbar und deshalb als globale Geometrie unseres zweidimensionalen Anschauungsraumes denkbar. Diese abstrakte Frage ist seit langem vollständig beantwortet, die Mathematik kennt sogar eine erschöpfende Aufzählung aller solchen Möglichkeiten. – Ähnliches wie oben über die zweidimensionale Kugeloberfläche lässt sich auch über das Dreidimensionale berichten. Das Weltall erscheint uns lokal, zum Beispiel in unserem Planetensystem, als dreidimensionaler euklidischer Raum. Im Grossen allerdings ist seine Struktur auch heute noch nicht geklärt. Und auch die Mathematik kennt noch keine definitive Übersicht über die prinzipiell überhaupt in Frage kommenden dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Zu diesen kosmologischen und mathematischen Problemen gibt es erst Vermutungen. Zur mathematischen Seite hat Thurston vor einigen Jahren eine Vermutung formuliert; sie ist zwar noch nicht bewiesen, es spricht aber heute vieles für ihre Richtigkeit. – Hansjörg Geiges berichtet über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten und die vielen interessanten Beziehungen, die sich hier ergeben: zur Kosmologie, zu Dante, zu Klein und Riemann und – last but not least – zu Thurston. *ust*

oder eines Zylinders und auch die Kreisscheibe der vorgriechischen Weltsicht haben eines gemeinsam: Im Lokalen sehen sie alle so aus wie ein Teil der euklidischen Ebene, das heißt lokal kann man auf diesen Flächen ein zweidimensionales Koordinatennetz einführen, wie dies für die Erdoberfläche auf jeder Landkarte zu sehen ist.

Von der Beobachtung der lokalen Euklidizität der beschriebenen Flächen gelangt man durch Abstraktion zum Begriff der Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension, der auf Riemanns berühmte Habilitations-Vorlesung in Göttingen von 1854 zurückgeht. Wir werden uns hier allerdings nur mit zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Ein topologischer Raum soll also 2-*Mannigfaltigkeit* oder *Fläche* heißen, wenn er lokal so aussieht wie die euklidische Ebene, und 3-*Mannigfaltigkeit*, wenn er im Kleinen aussieht wie der dreidimensionale euklidische Raum unserer Anschauung, in anderen Worten, wenn sich Punkte in kleinen Umgebungen in einem solchen Raum durch zwei bzw. drei Koordinaten eindeutig charakterisieren lassen.

Wir werden implizit annehmen, daß alle berücksichtigten Mannigfaltigkeiten orientierbar sind, ohne diesen Begriff hier weiter zu vertiefen. Außerdem interessieren wir uns in erster Linie für *geschlossene* Mannigfaltigkeiten. Dies bedeutet anschaulich, daß sich in einem solchen Raum (nach Einführung eines Abstandsbegriffes) ein Lichtstrahl (geometrisch: eine Geodätische) unendlich fortsetzen läßt, aber die Entfernung je zweier Punkte

eine bestimmte endliche Schranke nicht überschreitet. (Es ist durchaus erlaubt, daß sich ein Lichtstrahl selbst kreuzt oder gar in sich selbst zurückläuft.) Die euklidische Ebene selbst oder eine offene Kreisscheibe wären Beispiele für *offene* Mannigfaltigkeiten.

Mit Mitteln der Algebraischen Topologie oder der Differentialtopologie kann man eine vollständige Klassifikation von geschlossenen Flächen erreichen (Abb. 1). Neben der 2-Sphäre S^2 gibt es den 2-Torus T^2, die Oberfläche eines "doughnut"; die sogenannte Fläche vom Geschlecht zwei, Σ_2; und weiter Flächen mit einer zunehmenden Anzahl von "Henkeln". Von allen diesen Flächen können wir uns ein globales Bild machen, indem wir sie "von außen" im dreidimensionalen Raum betrachten, wie eben auch bei den Griechen Beobachtungen im dreidimensionalen Raum zur Entdeckung der Sphärizität der Erde führten.

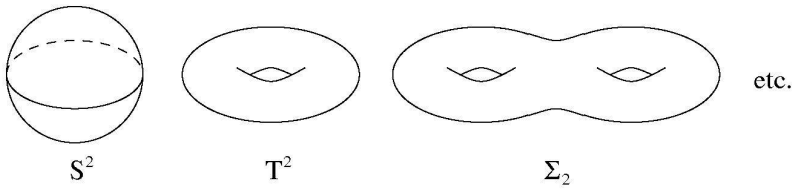


Abb. 1 Geschlossene 2-Mannigfaltigkeiten.

Eine ähnlich globale Vorstellung von 3-Mannigfaltigkeiten könnte man sich also nur in der vierten oder einer höheren Dimension machen. Es soll aber in diesem Artikel anhand einiger Beispiele gezeigt werden, wie man durch rein dreidimensionale Vorstellungen, also gewissermaßen "von innen", zu einem globalen Verständnis von 3-Mannigfaltigkeiten gelangen kann, und es soll auch kurz die Bedeutung einiger der beschriebenen 3-Mannigfaltigkeiten für die Kosmologie diskutiert werden. In den zwei letzten, etwas technischer gehaltenen Abschnitten geben wir einen Abriß von Thurstons Geometrisierungs-Programm für 3-Mannigfaltigkeiten. In [9] werden ähnliche Ideen wie in dem vorliegenden Artikel behandelt.

2 Sphärische Geometrie

In diesem und den folgenden zwei Abschnitten wollen wir eine alternative Beschreibung von S^2, T^2 bzw. Σ_2 geben und durch Analogie erste Beispiele von 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren.

Durch Projektion der nördlichen Hemisphäre von S^2 auf die Äquatorebene erkennt man, daß eine Hemisphäre topologisch äquivalent ist zu einer Kreisscheibe, allerdings wird hier die Geometrie der Sphäre (d.h. Abstände und Winkel) sehr stark verzerrt. Da die 2-Sphäre durch Verkleben zweier Hemisphären entlang des Äquators entsteht, kann man sich jedenfalls topologisch vorstellen, daß die 2-Sphäre durch Verkleben zweier Kreisscheiben entlang ihres Randes gebildet wird (Abb. 2). Bei diesem Verkleben heben sich die Ränder gewissermaßen gegenseitig auf; auf der 2-Sphäre ist der Äquator nur eine gedachte Grenze. Das resultierende Objekt ist also endlich aber unbegrenzt – eben eine geschlossene Fläche.

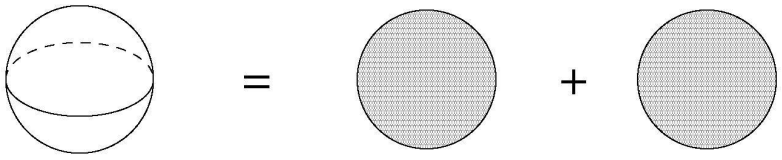


Abb. 2 Die 2-Sphäre.

Bei diesem topologischen Bild geht aber ein wichtiger geometrischer Aspekt der 2-Sphäre verloren. Man muß sich vorstellen (wie das bei der globalen Darstellung von S^2 klar ist), daß S^2 eine *homogene* Geometrie trägt, das heißt die Sphäre sieht von jedem Punkt auf ihr betrachtet gleich aus.

Ganz analog dazu erhält man die 3-Sphäre S^3, indem man zwei Vollkugeln entlang ihres Randes (einer 2-Sphäre) miteinander verklebt (Abb. 3). Auch hier muß man sich aber wieder vorstellen, daß das resultierende Objekt mit einer Geometrie versehen ist, die es zu einem homogenen Raum macht.

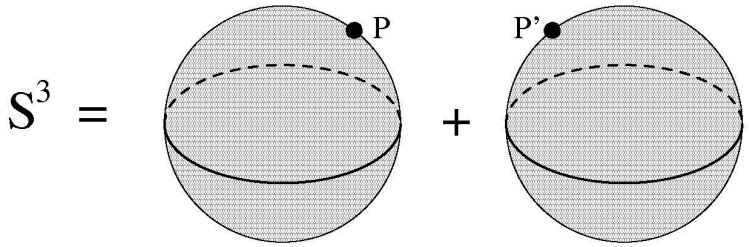


Abb. 3 Die 3-Sphäre.

Die 3-Sphäre ist demnach ebenfalls ein endlicher aber unbegrenzter Raum und außerdem lokal dreidimensional, wie man sich in Analogie mit der 2-Sphäre leicht klar macht, also eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Wir können uns zwar das konkrete Verkleben der beiden Vollkugeln nicht mehr vorstellen, da dies nur im vierdimensionalen Raum möglich ist. Man kann sich aber ein Bild davon machen, wie man von der linken Vollkugel in die rechte gelangt, indem man den Punkt P passiert, der mit P' identifiziert ist. Dabei überschreitet man nur einen imaginären Äquator, der hier eine 2-Sphäre ist.

In seiner Probevorlesung wies Riemann ausdrücklich darauf hin, daß die 3-Sphäre ein geometrisches Modell für ein endliches aber dennoch unbegrenztes Universum liefert. Es ist aber faszinierend festzustellen, daß dieses Modell bereits mehr als fünfhundert Jahre früher in der Literatur Erwähnung findet, nämlich in Dantes Göttlicher Komödie (Abb. 4). Hier stellt die eine Vollkugel das beobachtbare Universum da, das vom Kristallhimmel (Primum Mobile) begrenzt ist. Als Dante jedoch in diesen Kristallhimmel aufsteigt, stößt er nicht etwa an die Grenze des Universums, sondern blickt in das Empyreum oder Reich Gottes, in dem die Hierarchien der Engel ganz ähnlich auf Kugelschalen aufgereiht sind wie die Planeten und Sterne im beobachtbaren Universum. Auch hier muß man sich die beiden Vollkugeln entlang ihres Randes, des Kristallhimmels, miteinander

identifiziert vorstellen, das resultierende Universum ist also die beschriebene 3-Sphäre. Eine detaillierte Analyse des Danteschen Universums vom geometrischen Standpunkt aus mit Verweisen auf konkrete Textstellen findet der Leser in [5], vergl. auch [4].

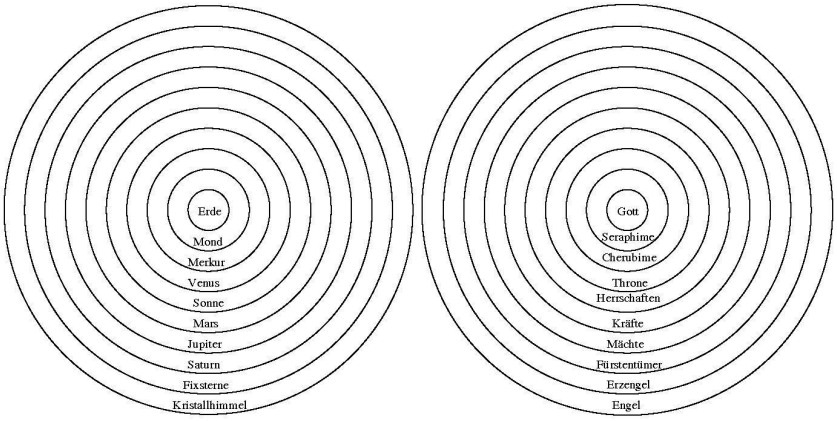


Abb. 4 Das Universum bei Dante.

4 Euklidische Geometrie

Betrachten wir als nächstes den 2-Torus T^2. Diesen kann man konstruieren, indem man in einem Rechteck in der euklidischen Ebene gegenüberliegende Seiten paarweise miteinander identifiziert (Abb. 5). Wenn man versucht, mit einem Blatt Papier durch Verkleben der Ränder dies konkret zu realisieren, so stellt man fest, daß man ein Seitenpaar tatsächlich verkleben kann und damit einen Zylinder erhält. Das zweite Seitenpaar kann aber nicht mehr miteinander verklebt werden, ohne das Papier zu verzerren.

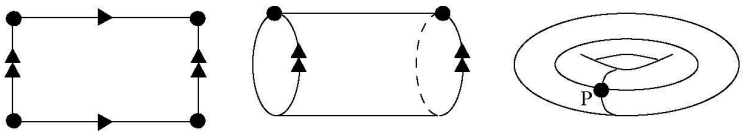


Abb. 5 Der 2-Torus.

Wir beobachten aber folgendes: Bei der abstrakten Identifikation der Seiten werden die vier Ecken des Rechteckes zu einem Punkt P identifiziert. Es werden also in P vier rechte Winkel miteinander verklebt, die zusammen genau einen vollen Winkel von 360° ergeben. Daher kann man diese Identifikation tatsächlich ausführen, ohne die (euklidische) Geometrie des Papiers zu verzerren, wenngleich man dazu in die vierte Dimension gehen müßte. Es bleibt festzuhalten, daß man den 2-Torus mit einer Geometrie versehen kann, so daß kleine Umgebungen auf T^2 geometrisch alle gleich aussehen, und zwar wie kleine Umgebungen in der euklidischen Ebene. Man spricht dann von einem *lokal*

homogenen Raum, in diesem Fall einem (im geometrischen Sinne) *lokal euklidischen* Raum.[1)]

Mathematisch exakter läßt sich dies einsehen, wenn man sich T^2 vorstellt als Quotienten der euklidischen Ebene E^2 unter ganzzahligen Translationen in horizontaler und vertikaler Richtung (Abb. 6), das heißt, zwei Punkte der Ebene werden genau dann miteinander identifiziert, wenn sich ihre x-Koordinaten um ein ganzzahliges Vielfaches von a und ihre y-Koordinaten um ein ganzzahliges Vielfaches von b unterscheiden; formal: $T^2 = \mathbf{Z}^2 \backslash E^2$. Da diese Translationen Isometrien sind, das heißt alle geometrischen Eigenschaften der euklidischen Ebene (wie Abstände, Winkel, Geraden, Kongruenz) erhalten, ist der resultierende Quotientenraum lokal euklidisch.

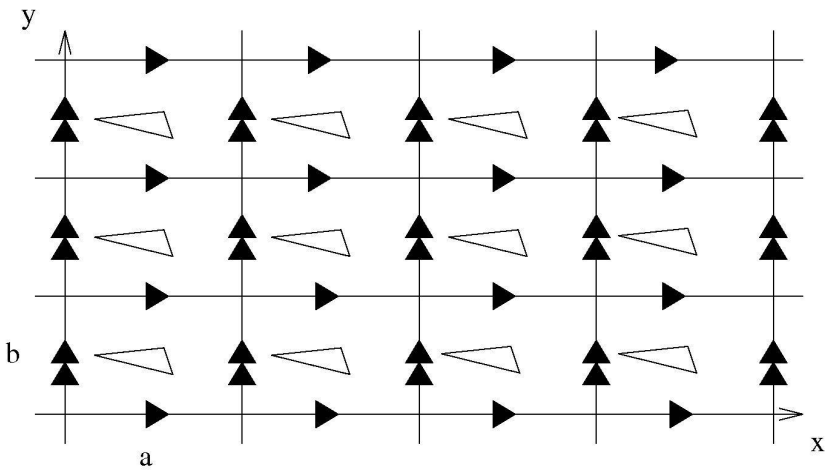


Abb. 6 Der 2-Torus als Quotient der euklidischen Ebene.

In direkter Analogie konstruiert man den 3-Torus T^3, indem man gegenüberliegende Seitenflächen eines Quaders im euklidischen Raum E^3 paarweise miteinander identifiziert. Konkret ließe sich diese Verklebung der Seitenflächen etwa im sechs-dimensionalen Raum ausführen. Wichtig ist aber wieder nur folgende Beobachtung: Der Kantenwinkel im Quader beträgt 90°. Bei der beschriebenen Identifikation der Seitenflächen des Quaders werden jeweils vier Kanten miteinander identifiziert. Daher ist diese Identifikation wieder möglich, ohne die Geometrie des Quaders zu verzerren; der resultierende 3-Torus ist also eine lokal homogene 3-Mannigfaltigkeit mit lokal euklidischer Geometrie. Man erkennt dies auch daran, daß man den euklidischen Raum mit Kopien des Quaders lückenlos ausfüllen kann. Formal können wir in Analogie zum 2-Torus schreiben: $T^3 = \mathbf{Z}^3 \setminus E^3$.

Ein Lichtstrahl, der auf die rechte Seitenwand des Quaders trifft, erscheint (nach Identifikation der Seiten) wieder an der linken Seitenwand. Blickt ein Beobachter im 3-Torus

1) Man überlegt sich leicht, daß T^2 in der Tat sogar homogen ist.

also nach rechts, sieht er dort seine linke Seite. Da die Sichtlinie den Torus unendlich oft durchlaufen kann, sieht der Beobachter sogar im Prinzip unendlich viele Abbilder von sich selbst (Abb. 7). Der optische Effekt ist demnach vergleichbar mit dem in einem Raum, dessen Wände verspiegelt sind, nur daß im letzteren Raum das erste, dritte, und allgemein jedes ungeradzahlige Abbild des Beobachters spiegelverkehrt wäre.

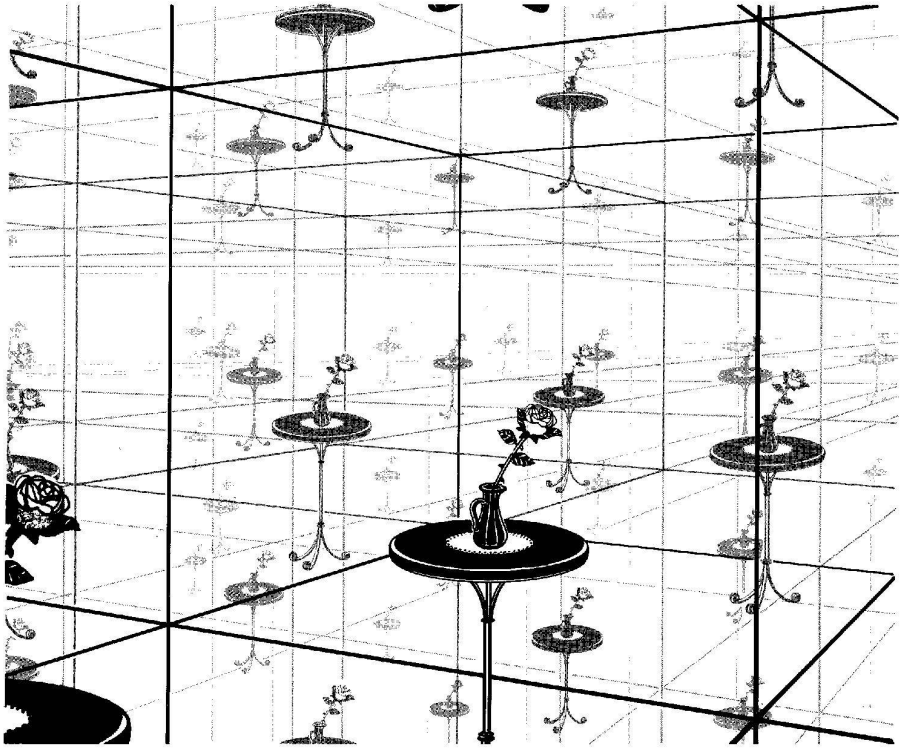


Abb. 7 Der 3-Torus, © Spektrum der Wissenschaft.

4 Hyperbolische Geometrie

Schneidet man die Fläche vom Geschlecht zwei entlang der in Abb. 8 gezeichneten Kurven auf, so läßt sich Σ_2 zu einem Achteck auffalten. Umgekehrt erhält man Σ_2, indem man die Ränder eines Achteckes wie in Abb. 9 gezeigt paarweise miteinander identifiziert. Wieder beobachten wir, daß dabei alle acht Ecken zu einem Punkt P identifiziert werden. Nun beträgt aber der Innenwinkel des regelmäßigen Achteckes in der euklidischen Ebene 135°, daher kann diese Identifikation nicht ausgeführt werden, ohne das euklidische Achteck zu verzerren.

Nichtsdestotrotz kann Σ_2 mit einer Geometrie versehen werden, die diese Fläche zu einer lokal homogenen Mannigfaltigkeit macht. Dazu betrachten wir das Poincaré-Modell

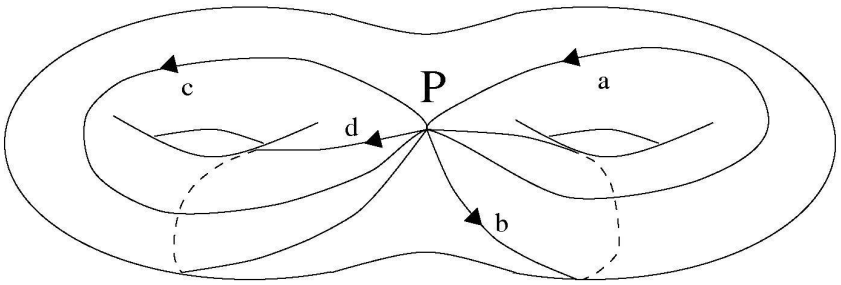


Abb. 8 Die Fläche vom Geschlecht zwei.

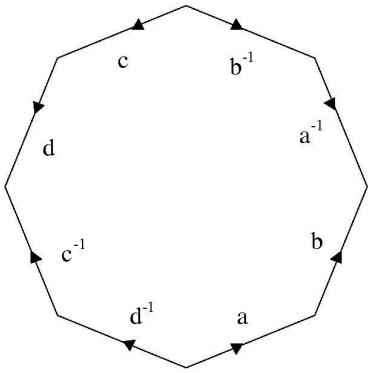


Abb. 9 Σ_2 via Identifikationen am Achteck.

der hyperbolischen Ebene H^2. In diesem Modell wird H^2 repräsentiert als offene Kreisscheibe in der euklidischen Ebene, und hyperbolische Geraden erscheinen als Durchmesser der Kreisscheibe oder Kreisbögen, die senkrecht zum Rand der Kreisscheibe sind (Abb. 10). Der Abstandsbegriff ist in diesem Modell so definiert, daß H^2 eine homogene 2-Mannigfaltigkeit ist.[2)]

Es folgt unmittelbar aus der Definition der hyperbolischen Geraden, daß die Innenwinkel eines sehr kleinen regelmäßigen Achteckes in H^2 annähernd gleich 135° sind, diese Innenwinkel aber gegen Null gehen, wenn man das Achteck vergrößert (Abb. 11).

Insbesondere findet man ein regelmäßiges Achteck in H^2, dessen Innenwinkel genau 45° betragen (Man vergleiche dies mit dem analogen Effekt auf S^2, wo die Innenwinkel eines Polygons beim Vergrößern desselben größer werden). Bei einem solchen Achteck lassen sich nun die Seiten wie in Abb. 9 miteinander identifizieren, ohne die Geometrie von H^2 zu verzerren, daher ist Σ_2 eine lokal homogene Mannigfaltigkeit mit lokal hyperbolischer Geometrie. Das gleiche gilt für alle Flächen höheren Geschlechts.

---

2) Inversionen an Kreisen senkrecht zum Rand der Kreisscheibe sind hyperbolische Isometrien, und jeder Punkt der Kreisscheibe läßt sich durch eine geeignete solche Inversion auf den Mittelpunkt abbilden.

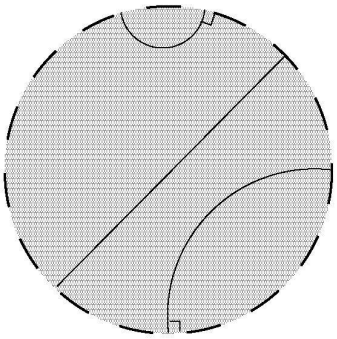


Abb. 10 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene.

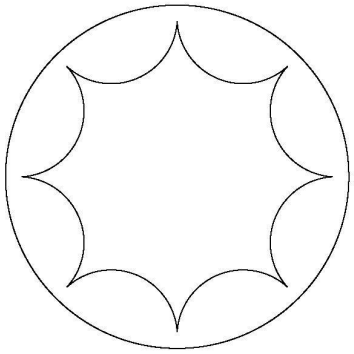


Abb. 11 Ein regelmäßiges Achteck in H^2.

Formal (und ganz analog zum 2-Torus) betrachtet man eine lückenlose Überdeckung von H^2 mit Kopien des regelmäßigen Achteckes mit Innenwinkel 45° (im Poincaré-Modell sehen diese Achtecke zum Rand hin sehr stark verzerrt aus) und bezeichnet mit Γ die Gruppe der (orientierungserhaltenden) Isometrien von H^2, die Achtecke dieser Überdeckung ineinander überführen. Es gilt dann $\Sigma_2 = \Gamma \setminus H^2$.

5 Die beiden Dodekaederräume

In Analogie zu der Beschreibung von Σ_2 in Abschnitt 4 wollen wir nun eine dreidimensionale lokal hyperbolische Mannigfaltigkeit konstruieren, und eine ähnliche Konstruktion wird uns eine lokal sphärische 3-Mannigfaltigkeit liefern. Ausgangspunkt der Konstruktion ist das Dodekaeder, eines der fünf regelmäßigen Polyeder (oder platonischen Körper), dessen Rand von zwölf regelmäßigen Fünfecken gebildet wird (Abb. 12).

Wir verkleben nun gegenüberliegende Seitenflächen des Dodekaeders, wobei wir jede Seite um $3/10$ eines vollen Winkels verdrehen, bevor wir die Identifikation ausführen (Abb. 12 links). Damit ergibt sich die in Abb. 13 gezeigte Identifikation. Man kann sich überlegen, daß dabei je fünf Kanten miteinander identifiziert werden.

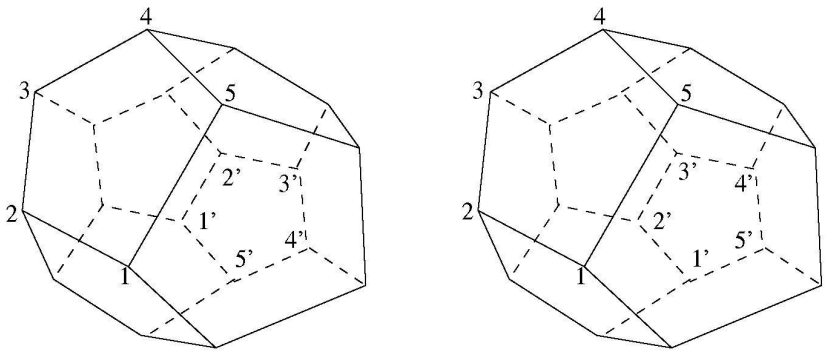


Abb. 12 Die beiden Dodekaederräume.

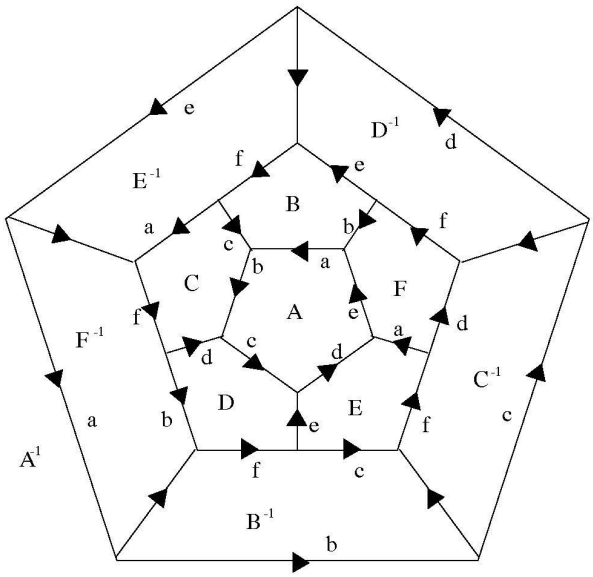


Abb. 13 Der Seifert-Weber-Dodekaederraum.

Nun beträgt aber der Kantenwinkel des euklidischen Dodekaeders annähernd 117°, so daß dieses Verkleben nicht mit einem solchen Dodekaeder ausgeführt werden kann. Wie im vorigen Abschnitt betrachtet man stattdessen ein Dodekaeder im hyperbolischen Raum, wo man einen analogen Effekt beobachtet: Beim Vergrößern eines Polyeders nehmen die Kantenwinkel ab, und man kann ein Dodekaeder mit Kantenwinkel $360°/5 = 72°$ finden. Nun ist das Verkleben auch geometrisch durchführbar, und man erhält den sogenannten *Seifert-Weber-Dodekaederraum*, eine lokal homogene 3-Mannigfaltigkeit mit lokal hyperbolischer Geometrie.

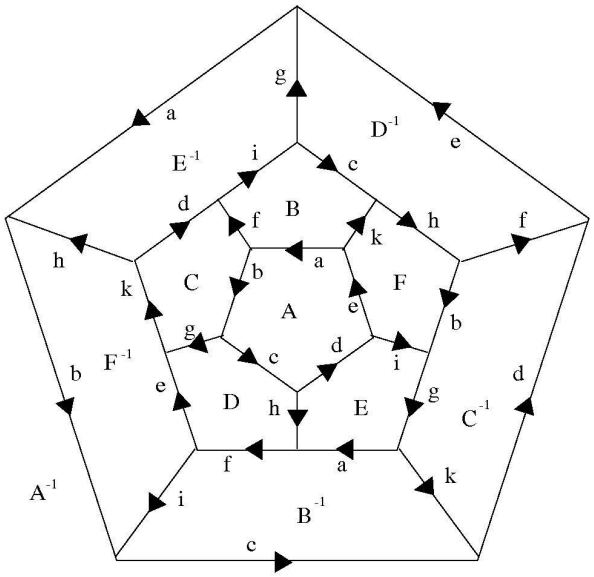


Abb. 14 Der Poincaré Dodekaederraum.

Verklebt man gegenüberliegende Seitenflächen des Dodekaeders dagegen mit einer Drehung von 1/10 (Abb. 12 rechts), so werden nur je drei Kanten miteinander identifiziert (Abb. 14).

Hier ist der Kantenwinkel des euklidischen Dodekaeders also zu klein. In der 3-Sphäre läßt sich aber ein Dodekaeder finden, dessen Kantenwinkel etwas größer, nämlich gleich $120° = 360°/3$ sind, und damit läßt sich die Identifikation wieder geometrisch ausführen. Die resultierende 3-Mannigfaltigkeit, der sogenannte Poincaré-Dodekaederraum, trägt also lokal sphärische Geometrie.

Eine detaillierte Beschreibung dieser beiden Dodekaederräume findet man in der sehr schönen Originalarbeit von Weber und Seifert [11].

6 Kosmologische Modelle

Astronomische Beobachtungen zeigen, daß unser Universum von der Erde aus betrachtet weitgehend *isotrop* ist, das heißt in jeder Richtung das gleiche Bild darbietet, wobei der Maßstab selbstverständlich hinreichend groß angelegt werden muß. Das kosmologische Prinzip postuliert, daß es keinen ausgezeichneten Beobachter im Universum gibt. Auf der Grundlage dieses Prinzips geht man daher davon aus, daß das Universum von jedem Beobachtungspunkt aus isotrop erscheint und eine homogene Masseverteilung besitzt.

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie beeinflußt die Masseverteilung im Universum dessen Geometrie, und so wird man auch von einem geometrischen Modell für das Universum fordern, daß es wenigstens lokal homogen ist. Die in den obigen Abschnitten beschriebenen 3-Mannigfaltigkeiten liefern gerade solche Modelle. Man beachte, daß in

diesen geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten die Homogenität des Universums im Großen eine Folge der Tatsache wäre, daß der Beobachter (wie am Beispiel des 3-Torus beschrieben) vielfache Kopien einer Fundamentalzelle (dort: eines Quaders) sehen würde. Solche Modelle würden also die beobachtete Homogenität der Masseverteilung als rein geometrisches Phänomen erklären. Weiter kommt hinzu: Wäre das Universum eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, so hätte im Urknall nur endlich viel Materie erzeugt werden müssen.

Aus diesen Gründen werden geschlossene Modelle von einigen Kosmologen bevorzugt. Ellis [2] gibt eine eingehende topologische Beschreibung solcher Modelle; in [1] werden diese Modelle vom Standpunkt der beobachtenden Astronomie aus diskutiert. In der Tat ließe es sich im Prinzip durch Beobachtung verifizieren, daß wir in einem geschlossenen Universum leben, da vielfache Abbilder des gleichen Objektes beobachtbar wären. Aufgrund der dabei wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit auftretenden Zeitverschiebungen wären solche Beobachtungen aber nur an sehr auffälligen Objekten möglich. In [1] werden aus diesen Überlegungen Abschätzungen für die Mindestgröße der Fundamentalzelle abgeleitet.

Die Vorstellung, das Universum könnte ein Dodekaederraum sein, ist besonders faszinierend angesichts der Tatsache, daß bereits Platon das Dodekaeder mit dem Weltganzen in Verbindung gebracht hat. Im "Timaios" identifiziert er vier der fünf regelmäßigen Polyeder, nämlich Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Ikosaeder, mit den Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser, und fährt dann fort (in der Übersetzung von O. Apelt): "Und da es noch eine Art der Zusammensetzung gibt, also eine fünfte [nämlich das Dodekaeder], so verwendete Gott sie für das Weltall, zu dem sie ihm als Muster dienen sollte."

Es ist angebracht, hier auf eine Sprachverwirrung zwischen Topologen und Kosmologen hinzuweisen. Von der Materiedichte im Universum hängt es ab, ob die gegenwärtig beobachtete Expansion des Universums zum Stillstand kommt und sich das Universum wieder zusammenzieht (was bei hinreichend großer Materiedichte der Fall wäre), oder ob es sich auf ewig ausdehnen wird. Wieder aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie wäre die Geometrie des Universums im ersten Fall lokal sphärisch, im zweiten Fall lokal euklidisch (falls die Materiedichte gerade so groß ist, daß die Expansionsgeschwindigkeit asymptotisch gegen Null geht) oder lokal hyperbolisch. Kosmologen sprechen im ersten Fall von einem *geschlossenen*, in den beiden anderen Fällen von einem *offenen* Universum. Wie unsere Diskussion gezeigt hat, könnte es sich aber auch in letzteren Fällen um ein im topologischen Sinne geschlossenes Universum handeln.

7 Geometrien im Sinne von Thurston

Wir haben bis jetzt den Begriff der Geometrie in einem durchaus naiven Sinne verwendet, ohne den Versuch einer Präzisierung zu unternehmen. Beispielsweise haben wir ihn auf sehr vage Weise mit Abstands- und Winkelbegriffen identifiziert. Gleichermaßen wichtig für eine Geometrie sind aber Konzepte wie Geraden und Ebenen (vergleiche etwa die Geradendefinition im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene) oder ein Kongruenzbegriff (vergleiche unsere Diskussion der Überdeckung von H^2 mit durch Spiegelungen erhaltenen Achtecken). In diesem Abschnitt soll der Geometrie-Begriff präzisiert werden, und in einem abschließenden Abschnitt diskutieren wir die Bedeutung solcher Geometrien für das globale Verständnis von 3-Mannigfaltigkeiten.

Die folgende Definition ist eine leichte Abwandlung einer Definition von Thurston [7, 8, 9]. Dieser Geometrie-Begriff ist eng verwandt mit dem von Felix Klein aus seinem Erlanger Programm von 1872.

Definition Eine *Geometrie* (X, G) ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit X zusammen mit einer Gruppe G von Isometrien von X, wobei gelten soll:

1. X ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend.
2. G operiert transitiv auf X, das heißt X ist ein homogener Raum.
3. G besitzt diskrete Untergruppen Γ, so daß der lokal homogene Raum $\Gamma \setminus X$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkungen.
(1) Streng genommen ist die Riemannsche Metrik auf X nicht Teil der Definition, vergl. die Bemerkungen in [10].

(2) Im allgemeinen nimmt man für G die Gruppe *aller* Isometrien von X und spricht dann kurz von der Geometrie X.

(3) Eine Mannigfaltigkeit der Form $M = \Gamma \setminus X$ heißt *geometrische Mannigfaltigkeit vom Typ* X.

Wir haben oben in Dimension zwei und drei je drei Geometrien kennengelernt und konkrete Beispiele geometrischer Mannigfaltigkeiten angegeben. In Dimension zwei gibt es keine weiteren Geometrien, und Thurston hat gezeigt, daß es in Dimension drei genau acht Geometrien gibt (Tab. 1), vergl. [6]. In Dimension vier gibt es achtzehn Geometrien, vergl. [10]. In höheren Dimensionen ist eine Klassifikation nicht bekannt.

Isotropiegruppe	Geometrien
SO(3)	S^3, E^3, H^3
SO(2)	$S^2 \times E^1$, $H^2 \times E^1$, Nil, $\widetilde{SL}_2$
trivial	Sol

Tabelle 1 Die Geometrien in Dimension drei.

Die drei oben beschriebenen Geometrien sind isotrop, das heißt die Isotropiegruppe ist SO(3). Vier der fünf weiteren Geometrien haben Isotropiegruppe SO(2), was anschaulich bedeutet, daß es in diesen Räumen eine ausgezeichnete oben-unten Richtung gibt. Die achte Geometrie ist vollständig anisotrop.

Wir wollen hier noch eine dieser Geometrien beschreiben, die Heisenberg-Gruppe Nil. Diese wird gebildet von den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $x, y, z \in \mathbf{R}$. Ein Beispiel für eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit vom Typ Nil ergibt sich, indem man für Γ die Gruppe aller solcher Matrizen mit $x, y, z \in \mathbf{Z}$ wählt. Mit anderen Worten, man betrachtet den Quotienten von $\mathbf{R}^3$ unter der Gruppe Γ, die

erzeugt wird von den Abbildungen

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z + 1),$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x, y + 1, z),$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x + 1, y, z + y).$$

Die Projektionsabbildung

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y)$$

gibt $\Gamma \setminus \mathrm{Nil}$ die Struktur eines S^1-Bündels über T^2.

Allgemeiner gilt, daß die Geometrien $S^2 \times E^1$, E^3, $H^2 \times E^1$, S^3, Nil und $\widetilde{SL}_2$ genau den Seifert-gefaserten 3-Mannigfaltigkeiten entsprechen. Anschaulich sind dies gerade jene 3-Mannigfaltigkeiten, auf denen ein Fluß definiert werden kann, der nur geschlossene Bahnen besitzt (wie etwa die Meridiankreise auf dem 2-Torus oder analog dazu auf dem 3-Torus). Auch Sol-Mannigfaltigkeiten besitzen eine sehr einfache Struktur, sie fasern als T^2-Bündel über S^1.

Damit läßt sich im Prinzip eine vollständige Beschreibung aller geometrischen 3-Mannigfaltigkeiten außer jenen vom Typ H^3 durch einfache numerische Invarianten angeben, und oft kann eine explizite analytische Beschreibung wie im Nil-Beispiel gegeben werden oder eine geometrische Darstellung wie bei den Dodekaederräumen.

8 Die Geometrisierungs-Vermutung

Man kann sich die Fläche vom Geschlecht zwei als *verbundene Summe* zweier Tori in folgendem Sinne vorstellen: Entferne eine Kreisscheibe aus jedem Torus und identifiziere die enstehenden Kreis-Ränder. Umgekehrt kann man Σ_2 entlang eines Kreises S^1 aufschneiden und die entstehenden Löcher mit Kreisscheiben auffüllen, so daß man zwei Kopien von T^2 erhält.

Ganz analog dazu kann eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit entlang von 2-Sphären aufgeschnitten werden in Mannigfaltigkeiten, die nicht weiter auf diese Weise zerlegt werden können. Diese unzerlegbaren Bausteine heißen *Prim*-Mannigfaltigkeiten, und die Zerlegung ist im wesentlichen eindeutig [3].

Thurstons *Geometrisierungs-Vermutung* besagt, daß alle Prim-Mannigfaltigkeiten, eventuell nach einem weiteren Aufschneiden entlang von Tori, eine geometrische Struktur im Sinne von Abschnitt 7 tragen. Thurston hat diese Vermutung für sogenannte *Haken*-Mannigfaltigkeiten bewiesen. Damit bezeichnet man Mannigfaltigkeiten M^3, die eine koorientierbar eingebettete Fläche $N^2 \neq S^2$ besitzen, die inkompressibel ist, das heißt, jede einfache Kurve auf N^2, die eine Scheibe in M^3 berandet, berandet bereits eine Scheibe in N^2. Dieser Satz wird oft auch als Thurstons Monster-Theorem bezeichnet.

Bei den nicht-Haken Mannigfaltigkeiten unterscheidet man die folgenden drei Fälle:

1. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist endlich: Hier übersetzt sich die Geometrisierungs-Vermutung in die *Orthogonalisierungs-Vermutung*. Danach sollte M von der Form $M = \Gamma \setminus S^3$ mit $\Gamma \subset \mathrm{SO}(4)$ sein. Anders formuliert: Eine einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ist notwendigerweise die 3-Sphäre (dies ist die berühmte *Poincaré-*

Vermutung), und jede freie Operation einer Gruppe auf S^3 ist konjugiert zu einer orthogonalen Operation. Für diesen zweiten Teil der Vermutung hat Rubinstein auf dem International Congress of Mathematicians 1994 in Zürich in vielen Fällen eine positive Antwort angekündigt.

2. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist nicht endlich und besitzt $\mathbf{Z}$ als normale Untergruppe: Hier gelangt man zur *Seifert-Faserraum-Vermutung*, welche besagt, daß alle diese Mannigfaltigkeiten eine Seifert-Faserung zulassen. Diese Vermutung wurde von Gabai und Casson-Jungreis bewiesen, mit wichtigen Beiträgen von mehreren anderen Mathematikern. Eine Liste von Referenzen findet man in der Einleitung zu Teil 2 von [3].

3. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist nicht endlich und besitzt keine normale Untergruppe isomorph zu $\mathbf{Z}$: In diesem Fall wird Thurstons Vermutung zur *Hyperbolisierungs-Vermutung*, wonach solche Mannigfaltigkeiten von der Form $M = \Gamma \backslash H^3$ sind. Hier gibt es sehr weitreichende Ergebnisse von Thurston und anderen, für Referenzen siehe wieder [3].

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß inzwischen die Evidenz für die Geometrisierungs-Vermutung überwältigend ist. In jedem Fall hat sie wichtige Impulse für die 3-Mannigfaltigkeit-Topologie geliefert, wenngleich die Poincaré-Vermutung nach wie vor allen Beweisversuchen trotzt.

Danksagung. Dieser Artikel basiert auf meiner Einführungsvorlesung an der ETH Zürich vom Januar 1996. Ich möchte Herrn Professor Urs Stammbach für die Einladung danken, das Manuskript der Vorlesung für die Elemente der Mathematik auszuarbeiten.

Bildnachweis. Abbildung 7 stammt aus [9] und wird hier abgedruckt mit freundlicher Genehmigung der Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft.

Literatur

[1] C.C. Dyer, An introduction to small universe models, in: Theory and Observational Limits in Cosmology, Proceedings of the Vatican Observatory Conference held in Castel Gandolfo, July 1985, edited by W.R. Stoeger, S.J., Specola Vaticana, 1987.

[2] G.F.R. Ellis, Topology and cosmology, Gen. Relativity Gravitation 2 (1971), 7–21.

[3] J. Milnor, Collected Papers, Volume 2: The Fundamental Group, Publish or Perish, Houston, Texas, 1995.

[4] R. Osserman, Poetry of the Universe, Weidenfeld & Nicolson, London, 1995.

[5] M.A. Peterson, Dante and the 3-sphere, Amer. J. Phys. 47 (1979), 1031–1035.

[6] P. Scott, The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401–487.

[7] W.P. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357–381.

[8] W.P. Thurston, Three-Dimensional Geometry and Topology, Princeton University Press, 1997.

[9] W.P. Thurston and J.R. Weeks, Die Mathematik dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, Spektrum der Wissenschaft 9 (1984), 110–127.

[10] C.T.C. Wall, Geometric structures on compact complex analytic surfaces, Topology 25 (1986), 119–153.

[11] C. Weber und H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume, Math. Z. 37 (1933), 237–253.

Hansjörg Geiges
Departement Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich